ANALISI DINAMICA NEL DOMINIO DEL TEMPO

Marco BOZZA *

** Ingegnere Strutturale, già Direttore della Federazione regionale degli Ordini degli Ingegneri del Veneto (FOIV), Amministratore di ADEPRON*

INTRODUZIONE

I sistemi a un grado di libertà (SDOF) soggetti a forzanti generiche costituiscono il caso più generale di analisi, potendo rientrare in questa categoria qualunque forzante esterna F(t). Lo studio di questi oscillatori è importante perché l'analisi dei sistemi (strutture reali) a N gradi di libertà soggette a sisma, per i quali si può ammettere un comportamento lineare, è riconducibile a quella di N oscillatori indipendenti a un grado di libertà. Nota la F(t) soluzioni analitiche esatte possono essere determinate eseguendo un'*Analisi nel Dominio del Tempo*.
Con questo metodo la soluzione esatta di questi sistemi è nota nell'ipotesi ovvia che si conosca a priori la funzione F(t). Nel caso però dei terremoti, l'azione sismica non costituisce un dato noto del problema, essendo essa una forzante aleatoria (in intensità in funzione del tempo e in direzione). Utilizzando tuttavia la *Tecnica dello Spettro di Risposta* (basata sull'analisi nel dominio del tempo) è possibile comunque valutare la risposta di questi singoli sistemi SDOF, e quindi, mediante l'*Analisi Modale*, quella dell'intera struttura.

L'equazione del moto per questi sistemi si scrive allora nella forma:

(1) $$M \cdot \ddot{x}(t) + C \cdot \dot{x}(t) + K \cdot x(t) = F(t)$$

essendo M la massa dell'oscillatore, C lo smorzamento viscoso, K la rigidezza elastica e F(t) la forzante generica agente sul sistema nell'intervallo (0,t). La (1) può essere riscritta nella forma equivalente:

(2) $$\ddot{x}(t) + 2 \cdot \omega \cdot \xi \cdot \dot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = \frac{F(t)}{M}$$

dove si ricorda che:

(3) $$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

è la *frequenza angolare*, o *pulsazione naturale* del sistema non smorzato e:

(4) $$\xi = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2 \cdot M \cdot \omega}$$

è il *rapporto di smorzamento viscoso*, con C_C *smorzamento critico* del sistema. L'analisi che segue considera due ipotesi sullo smorzamento viscoso:

sistemi non smorzati ($\xi = 0$);
sistemi con smorzamento sotto-critico ($\xi < 1$).

SISTEMI NON SMORZATI

L'equazione del moto (2) per sistemi non smorzati ($\xi = 0$) diviene:

(5) $$\ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = \frac{F(t)}{M}$$

Se si suppone che sull'oscillatore agisca un impulso elementare $dP=F(\tau)d\tau$ al tempo $t = \tau$, si dimostra che la risposta elementare dx(t) del sistema dovuto a tale impulso vale:

(6) $$dx(t) = \frac{1}{M \cdot \omega} \cdot \sin\left(\omega(t - \tau)\right) \cdot dP \qquad t \geq \tau$$

Da un punto di vista matematico l'azione dell'impulso dP può essere definita nella seguente forma:

(7) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) \cdot F(t) \cdot dt = F(\tau)$$

essendo δ(t) la *funzione δ di Dirac*. Il concetto fondamentale su cui si basa la soluzione della (5) è quello di considerare la storia temporale del carico esterno generico F(t) come una successione di infiniti impulsi elementari dP, ciascuno dei quali produce la risposta elementare (6). Poiché l'oscillatore è lineare, la risposta totale del sistema nell'intervallo (0,t) si ottiene sommando tutte le risposte elementari, ovvero integrando la (6) su questo intervallo:

(8) $$x(t) = \frac{1}{M \cdot \omega} \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \sin(\omega(t - \tau)) \cdot d\tau \qquad t \geq 0$$

Questa funzione integrale è detta *Integrale di Duhamel* o *Integrale di Convoluzione* e fornisce un legame diretto tra la forzante F(t) e la risposta x(t) del sistema non smorzato. Poiché la (8) è ottenuta per integrazione in un intervallo temporale, questa procedura viene anche detta *Analisi nel Dominio del Tempo*. Per azioni del tutto generiche la (8) può essere calcolata solamente per via numerica. Essa può essere riscritta nelle forme:

(9) $$x(t) = \int_0^t F(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \int_0^t F(t-\tau) \cdot h(\tau) \cdot d\tau \qquad t \geq 0$$

dove si è indicato con:

(10) $$h(t-\tau) = \frac{1}{M \cdot \omega} \cdot \sin\left(\omega(t-\tau)\right) \qquad t \geq \tau$$

la *Funzione di Risposta all'Impulso*, ovvero la risposta del sistema ad un impulso di intensità unitaria applicato all'istante t = τ. In altri termini se all' all'istante t = τ si applica al sistema non smorzato un impulso di intensità unitaria, la risposta del sistema (vibrazioni libere) per t ≥ τ è data dalla (10) (moto armonico). L'equazione (9) mostra che la risposta del sistema può essere anche interpretata come la risposta ad una forzante h(t) di un sistema che ha come funzione di risposta all'impulso, ad un impulso unitario, la forzante F(t).
Si osservi che la (8) soddisfa solo le condizioni $x(0)=dx(t)/dt\,|_{t=0} = 0$. Affinché tuttavia rappresenti la risposta del sistema nel caso di condizioni più generali, essa deve rispettare le condizioni iniziali x(0) e $dx(t)/dt\,|_{t=0}$ al tempo t = 0, e quindi deve essere riscritta nella forma definitiva:

(11) $$x(t) = x(0) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{1}{M \cdot \omega} \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \sin(\omega(t - \tau)) \cdot d\tau$$

Si precisa che la procedura appena descritta può essere applicata solo ai sistemi lineari, poiché, come detto, la risposta è ottenuta come sovrapposizione di singole risposte dovute ai rispettivi impulsi.

SISTEMI CON SMORZAMENTO SOTTO-CRITICO

L'estensione dell'analisi degli oscillatori SDOF soggetti a una forzante generica ai sistemi con smorzamento sotto-critico (ξ < 1) comporta, per la presenza di ξ non nulla, una risposta smorzata esponenzialmente. In analogia al caso precedente si dimostra infatti che:

(12) $$dx(t) = \frac{1}{M \cdot \omega_D} \cdot \sin\left(\omega_D(t - \tau)\right) \cdot \exp\left(-\xi \cdot \omega(t-\tau)\right) \cdot dP \qquad t \geq \tau$$

rappresenta la risposta elementare dell'oscillatore all'applicazione di un impulso elementare dP=F(τ)dτ, dove ora:

(13) $$\omega_D = \omega \cdot \sqrt{1-\xi^2}$$

è la pulsazione del sistema smorzato (2). Come nel caso precedente la risposta totale del sistema nell'intervallo (0,t) si ottiene sommando tutte le risposte elementari, ovvero integrando la (12) su questo intervallo:

(14) $$x(t) = \frac{1}{M \cdot \omega_D} \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \sin(\omega_D\,(t-\tau)) \cdot \exp\left(-\xi \cdot \omega(t-\tau)\right) \cdot d\tau \qquad t \geq 0$$

La (14) è l'equivalente della (8) per sistemi smorzati con le condizioni iniziali x(0)=dx(t)/dt$|_{t=0}$ = 0. L'integrale di Duhamel si scrive ancora nella forma (8), ma in questo caso la funzione di risposta vale:

(15) $$h\left(t-\tau\right) = \frac{1}{M \cdot \omega_D} \cdot \sin\left(\omega_D\,(t-\tau)\right) \cdot \exp\left(-\xi \cdot \omega(t-\tau)\right) \qquad t \geq \tau$$

Poiché la (15) rappresenta la risposta (vibrazioni libere) successiva all'applicazione dell'impulso unitario, si vede chiaramente come essa rappresenti un moto armonico smorzato. Per condizioni iniziali x(0) e dx(t)/dt$|_{t=0}$ non nulle la risposta generale del sistema si scrive nella forma:

(16) $$x(t) = \left[x(0) \cdot \cos\left(\omega_D \cdot t\right) + \left(\frac{\dot{x}(0) + x(0) \cdot \xi \cdot \omega}{\omega_D}\right) \cdot \sin\left(\omega_D \cdot t\right)\right] \cdot \exp\left(-\xi \cdot \omega \cdot t\right) + \\ + \frac{1}{M \cdot \omega_D} \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \sin(\omega_D\,(t-\tau)) \cdot \exp\left(-\xi \cdot \omega(t-\tau)\right) \cdot d\tau$$