

## ANALISI MEDIANTE LO SPETTRO DI RISPOSTA

Marco BOZZA \*

\* *Ingegnere Strutturale, già Direttore della Federazione regionale degli Ordini degli Ingegneri del Veneto (FOIV), Amministratore di ADEPRON*

### DINAMICA DELL'OSCILLATORE ELEMENTARE

La valutazione della risposta sismica di una struttura intelaiata può essere condotta agevolmente mediante la tecnica dello *spettro di risposta*. Si consideri a tal fine un telaio costituito da un traverso di massa  $M$  sostenuto da piedritti elastici di lunghezza  $h$  e di massa trascurabile, deformabili solo nel piano del telaio stesso. Dal punto di vista dinamico esso è equivalente ad un oscillatore elementare a un grado di libertà. Tale schema non è rappresentativo di strutture di pratico interesse, tuttavia per la sua semplicità consente di dare significato intuitivo ai parametri che definiscono il comportamento dinamico, e di chiarire gli aspetti elementari della risposta delle strutture durante un sisma. Si limita lo studio al caso in cui gli spostamenti del sistema rispetto al terreno si mantengono piccoli rispetto all'altezza  $h$ . In tali condizioni la massa può compiere, rispetto al terreno, solo spostamenti orizzontali.

#### Equazione del moto

Sia  $K$  la costante elastica flessionale complessiva dei sostegni:  $Kx(t)$  è la reazione esercitata dai sostegni sulla massa, essendo  $x(t)$  lo spostamento di questa rispetto al terreno.

La dissipazione del sistema nel suo moto sia definita da uno smorzatore viscoso, nel quale si ipotizza che la forza viscosa vari linearmente con la velocità  $dx(t)/dt$  secondo la costante moltiplicativa  $C$ . Anche questa azione, come la precedente, se di valore positivo ha verso opposto a quello delle  $x$  positive.

Quando il terreno compie degli spostamenti orizzontali,  $y(t)$ , nel piano del telaio, la massa  $M$  si mette pure in movimento per effetto di forze che su di essa esercitano i sostegni elastici e lo smorzatore viscoso. Lo scopo è quello di calcolare lo spostamento  $x(t)$  della massa durante il terremoto, noti che siano la funzione di eccitazione  $\ddot{y}(t)$  (accelerogramma) e le costanti del sistema  $M, K, C$ .

Lo spostamento assoluto della massa  $M$  è dato da  $x(t) - y(t)$ , per cui l'equazione del moto del sistema si scrive:

$$(1) \quad M(\ddot{x} - \ddot{y}) + C\dot{x} + Kx = 0$$

ovvero:

$$(2) \quad M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = M\ddot{y}$$

ove si è messo in evidenza, come forza esterna impressa al sistema, il termine noto  $M\ddot{y}$ . Le condizioni iniziali sono:

$$(3) \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

La relazione (2) può essere riscritta nella forma:

$$(4) \quad \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \ddot{y}$$

dove si è indicato con:

$$(5) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$(6) \quad \xi = \frac{C}{2M\omega_0}$$

rispettivamente, la *frequenza angolare naturale* e il *rapporto di smorzamento viscoso* del sistema. Dalla (5) il *periodo naturale* del sistema vale:

$$(7) \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{K}}$$

A titolo orientativo edifici multipiano, per abitazione o per uffici in acciaio, hanno approssimativamente  $T_0 \approx 0,1 N$ , essendo N il numero dei piani.

### SPETTRO DI RISPOSTA IN TERMINI DI SPOSTAMENTO

Nota la (4), per fissato accelerogramma  $\ddot{y}(t)$ , è possibile definire la storia di  $x(t)$ , ossia la funzione che, istante per istante, definisce lo spostamento (risposta) del traverso del telaio. In generale, tuttavia, non interessa conoscere la descrizione completa della funzione  $x(t)$  (*Time History*), ma è sufficiente conoscere il valore massimo  $x_{max}$  che tale funzione raggiunge durante l'evento sismico ad un certo istante  $t_S$ , ovvero sia  $x_{max}=x(t_S)$ . L'istante  $t_S$  è il valore temporale per il quale si verifica il picco della risposta  $x_{max}$  dell'oscillatore. Ripetendo il procedimento facendo ora variare il periodo  $T_0$  (fermo restando  $\xi$ ) e riportando in un diagramma tali valori al variare di  $T_0$  si ottiene il cosiddetto *spettro di risposta in termini di spostamento* corrispondente alla storia di carico  $\ddot{y}(t)$ .

L'importanza di questo diagramma consiste nel fatto che se il sistema fosse composto da un portale semplice (un solo grado di libertà) si potrebbe ottenere il valore massimo dello spostamento, cioè lo spostamento di progetto, senza necessità di integrare l'equazione del moto. Questo perché una volta noto lo spettro di risposta, le massime sollecitazioni nel portale durante l'azione sismica  $\ddot{y}(t)$  potranno essere calcolate a partire da uno spostamento del traverso pari a  $x_{max}$ , ovvero per una forza nei supporti della struttura pari a  $Kx_{max}$  (*forza statica equivalente*).

### SPETTRO DI RISPOSTA IN TERMINI DI ACCELERAZIONE

Come detto, la forza statica equivalente, cioè la forza che agendo staticamente è in grado di produrre lo stesso stato di sforzo nei supporti della struttura, è  $Kx_{max}$ . Si definisce **spettro di risposta in termini di accelerazione**  $S_a$  il rapporto tra  $Kx_{max}$  e la massa M:

$$(8) \quad S_a = \frac{K x_{max}}{M} = \omega_0^2 \cdot x_{max}$$

e quindi lo si ottiene come rapporto tra la massima forza di inerzia orizzontale che agisce sulla massa e la massa stessa. In termini dimensionali esso equivale ad una accelerazione. Dalle relazioni (5) e (7) si può esprimere la (8) in funzione del periodo proprio  $T_0$ :

$$(9) \quad S_a = \frac{4\pi^2 \cdot x_{max}}{T_0^2}$$

Allo scopo di illustrare l'andamento qualitativo di uno spettro di risposta in termini di accelerazioni si riporta nella Figura 1 l'accelerogramma relativo alla registrazione di El Centro (1940) caratterizzata da un'accelerazione di picco al suolo  $a_g$  pari a 0,348g, per un rapporto di smorzamento  $\xi = 0,05$  (valore di riferimento delle Normative Sismiche).

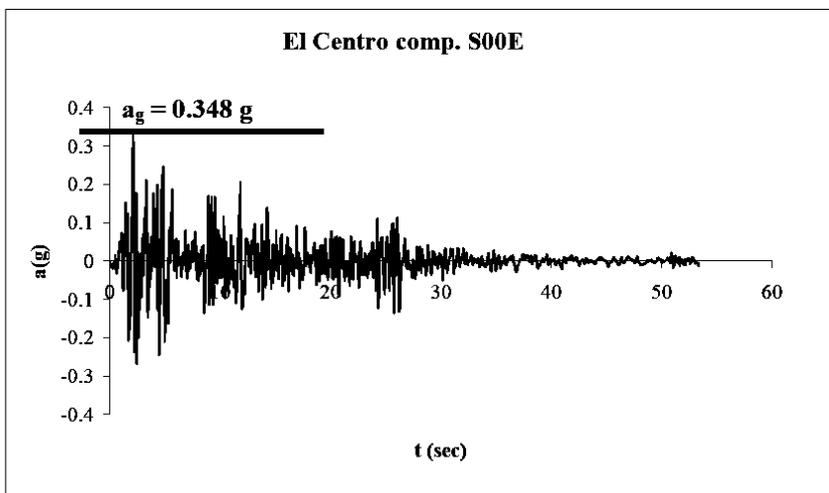


Figura 1

Ripetendo il procedimento e riportando in un diagramma i valori di  $S_a$  in funzione di  $T_0$  si ottiene la curva che rappresenta lo spettro di risposta in termini di accelerazione dell'oscillatore semplice (Figura 2). Il valore di  $S_a$  per  $T_0 = 0$ , per ragioni fisiche, è pari proprio al valore dell'accelerazione di picco al suolo  $0,348g$  (valore di ancoraggio dello spettro). Per questo particolare accelerogramma lo spettro presenta, nel campo dei periodi medio-bassi, amplificazioni dell'accelerazione di picco con valori massimi di  $S_a$  pari a circa  $2,6a_g$ .

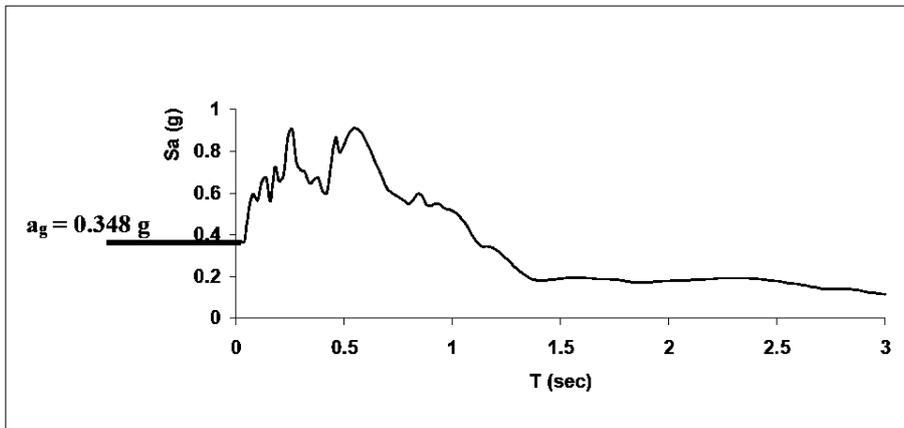


Figura 2

La relazione (9) vale per un particolare valore del rapporto di smorzamento  $\xi$  (Figura 2): al variare del parametro  $\xi$  si ottengono curve diverse. Ad esempio nella Figura 3 si riporta lo spettro di risposta del sisma di El Centro per valori di  $\xi$  pari a 1%, 10% e 20%.

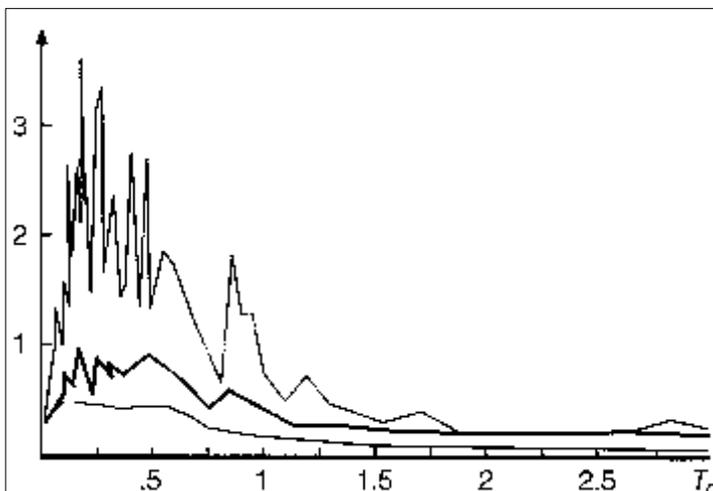


Figura 3

### Osservazioni

In generale la forma dello spettro, dipendente dal contenuto in frequenza dell'accelerogramma, risulta rappresentativa del meccanismo generatore dell'evento sismico, della natura dei terreni attraversati e delle caratteristiche stratigrafiche e geotecniche del sito in cui è stata effettuata la registrazione. Gli strumenti di misura dei terremoti violenti forniscono le registrazioni delle tre componenti dell'accelerazione del terreno. Le più significative registrazioni vengono elaborate nei centri di ricerca specializzati per ricavare, tramite la (4), il diagramma di  $S_a$  in funzione di  $T_0$  e di  $\xi$ . Poiché il moto del terreno è dovuto alla propagazione di onde, i punti interessati dalle fondazioni di uno stesso edificio subiscono anche degli spostamenti relativi. Le lunghezze d'onda in gioco sono generalmente grandi rispetto alle ordinarie dimensioni degli edifici, così che gli spostamenti relativi suddetti sono di norma trascurati. Per costruzioni di dimensioni eccezionali, come per esempio una diga o un ponte, è necessario tenerne conto.

## SIGNIFICATO E IMPORTANZA DELLO SPETTRO DI RISPOSTA

Si può facilmente vedere che lo spettro di risposta in termini di accelerazioni riporta, per un certo valore di  $\xi$  ed al variare del periodo  $T_0$  dell'oscillatore semplice, i valori massimi  $S_a$  dell'accelerazione della massa  $M$  durante l'eccitazione sismica. Infatti, nell'istante nel quale si verifica lo spostamento massimo, la velocità è nulla, per cui dalla (1):

$$(10) \quad M(\ddot{x} - \ddot{y}) + Kx = 0$$

ovvero:

$$(11) \quad (\ddot{x} - \ddot{y})_{\max} \cong -\frac{K}{M} x_{\max}$$

Il segno  $\cong$  sta ad indicare che nell'istante nel quale la velocità è nulla, è massimo  $x(t)$ , ma non necessariamente raggiunge il suo massimo il primo termine a primo membro. Tenendo conto che dalla (9) si ricava la relazione:

$$(12) \quad x_{\max} = \frac{S_a \cdot T_0^2}{4\pi^2}$$

la relazione (11) può essere riscritta nella forma:

$$(13) \quad (\ddot{x} - \ddot{y})_{\max} \cong -S_a$$

Quest'ultima è una relazione approssimata, ben verificata nella maggior parte dei casi. La (13) è comunque confortata dai risultati di indagini numeriche eseguite nel campo delle applicazioni che interessano l'Ingegneria Civile. Essa indica che

*lo spettro rappresenta, con buona approssimazione, la massima accelerazione assoluta che la massa del sistema subisce per effetto del moto sismico del suolo.*

Moltiplicando  $S_a$  per la massa  $M$  si ottiene quindi il valore massimo della forza d'inerzia indotta dall'eccitazione sismica. Pertanto, lo spettro di risposta in termini di accelerazioni fornisce un'informazione fondamentale per il progetto in zona sismica, e cioè il livello delle forze indotte dall'azione sismica.

Dall'esame degli spettri di risposta ottenuti da quasi tutti i sismi reali, di cui si possiedono gli accelerogrammi, si traggono le seguenti considerazioni:

- se la struttura è molto rigida ( $T_0 \rightarrow 0$ ), il suo moto coincide con il moto del terreno, e la massima accelerazione subita dalla massa  $M$  coincide con la massima accelerazione del terreno, per cui  $S_a = \ddot{y}_{\max}$ ;
- se la struttura è molto deformabile, per esempio  $T_0 > 2$  s, la massima accelerazione subita dalla massa  $M$  è inferiore al valore della massima accelerazione del terreno, per cui  $S_a < \ddot{y}_{\max}$ ;
- se la struttura ha valori del periodo proprio  $T_0$  intermedi, ad esempio compresi tra 0,1 s e 1 s, la massima accelerazione subita dalla massa  $M$ , supera notevolmente la massima accelerazione del terreno, per cui  $S_a > \ddot{y}_{\max}$ .

Si conclude allora che i valori dello spettro sono più elevati quanto minore è lo smorzamento  $\xi$ . L'influenza dello smorzamento è sensibile per strutture poco smorzate. Per strutture con smorzamento attorno al 20% dello smorzamento critico, od oltre, una variazione di  $\xi$  non produce sensibili variazioni di  $S_a$ .

### Importanza dello spettro di risposta

Come si è visto l'utilizzo dello spettro di risposta dovrebbe a rigore essere applicato soltanto a sistemi ad un grado di libertà. Come anticipato, infatti, la (4) corrisponde ad uno schema strutturale assai semplice, per cui si presta direttamente alle applicazioni pratiche solo nel caso di costruzioni molto semplici. E' ben noto tuttavia che le strutture reali sono schematizzabili come sistemi complessi a molti gradi di libertà. L'impiego dello spettro di risposta nell'analisi dinamica riveste tuttavia notevole importanza nell'Ingegneria Sismica perché, tramite l'Analisi Modale, la risoluzione di strutture più complesse, a  $N$  gradi di libertà, può in generale essere ricondotta alla risoluzione di  $N$  sistemi, ciascuno a un grado di libertà. Per ognuno di questi sistemi è possibile poi valutare la risposta massima applicando la procedura sopra descritta dello spettro di risposta.

## SPETTRI DI RISPOSTA NELLE NORMATIVE SISMICHE

Come detto, nella realtà una storia di accelerazioni  $\ddot{y}(t)$  è poco significativa per un utilizzo pratico in sede progettuale. La forma di uno spettro non può essere, ovviamente, quella relativa ad un singolo evento sismico; essa viene definita, mediante studi di tipo probabilistico, facendo riferimento all'insieme degli eventi che possono verificarsi in una certa zona. E questo è ciò che è stato fatto in passato da molti studiosi di ingegneria sismica, ossia quello di calcolare gli spettri di risposta per moltissime registrazioni di accelerazioni sismiche  $\ddot{y}(t)$  (opportunamente normalizzate). I risultati di tali studi, ottenuti eseguendo opportune procedure statistiche, sono stati utilizzati per creare gli *spettri di risposta elastici*, ovvero spettri di risposta ricavati mediando i valori dei corrispondenti spettri di risposta ottenuti da diversi accelerogrammi.

Da quanto detto in precedenza la caratterizzazione dell'azione sismica mediante uno spettro di risposta elastico in termini di accelerazione  $S_e$  richiede (Figura 4):

la definizione di una forma spettrale normalizzata coerente con il meccanismo generatore e con le condizioni morfologiche e geotecniche del sito;

il valore dell'accelerazione di picco al suolo  $a_g$ , al quale "ancorare" lo spettro, rappresentativo della pericolosità sismica del sito, operante come fattore di scala della forma normalizzata.

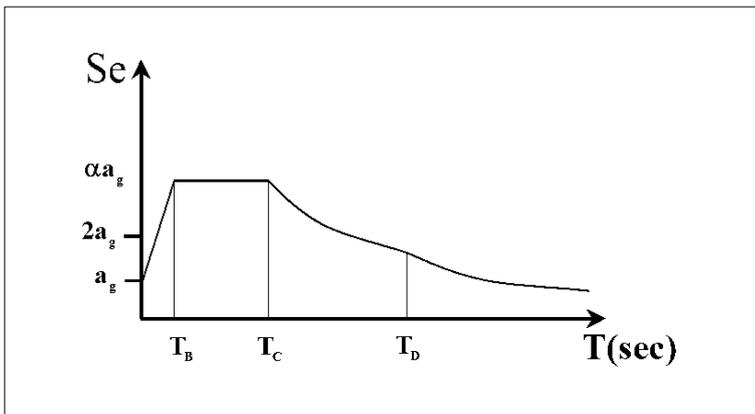


Figura 4

Gli spettri di risposta forniti dalle Normative Sismiche di varie nazioni forniscono quindi al progettista in modo diretto e con uno sforzo relativamente modesto, connesso alla valutazione del periodo proprio e dello smorzamento, una variabile, come lo spostamento o l'accelerazione, che risulta utile per ricavare le sollecitazioni di progetto.

## DUTTILITÀ E SPETTRO DI RISPOSTA DI PROGETTO

Il terremoto da considerare in fase di progetto viene normalmente definito tramite uno spettro di risposta, e non attraverso registrazioni dell'accelerazione del terreno. Lo spettro di risposta, in tal caso, rappresenta gli effetti della famiglia dei terremoti possibili per il sito e può essere ottenuto come involuppo degli spettri di risposta dei terremoti considerati rappresentativi, oppure come spettro di risposta medio, a seconda degli scopi che si perseguono: un tale spettro viene definito *spettro di risposta di progetto*.

Per definire tale spettro si consideri una forza  $F$  esterna applicata alla massa  $M$  del solito telaio. Si supponga, inoltre, che il diagramma  $F-x$  sia di tipo elasto-perfettamente plastico, con un valore ultimo  $F_0$  (si veda la Figura 5).

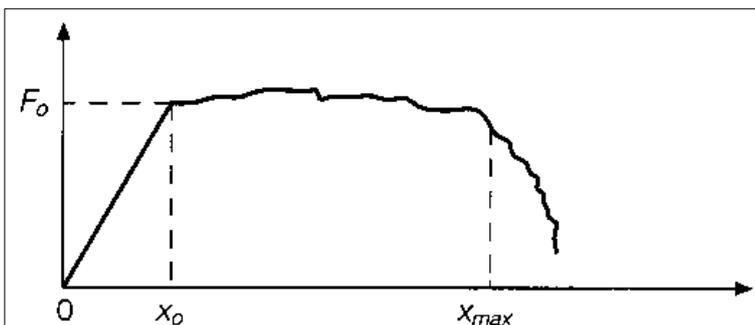


Figura 5

Sia  $x_{\max}$  lo spostamento al raggiungimento del quale si ha un degrado riconoscibile della struttura. Il rapporto:

$$(14) \quad \mu = \frac{x_{\max}}{x_0}$$

è definito *duttilità* della struttura, con  $x_0$  spostamento che definisce il limite elastico, corrispondente a  $F_0$ . La duttilità rappresenta quindi la capacità di resistenza della struttura oltre il limite elastico. Se la struttura non ha un comportamento riconducibile allo schema elasto-perfettamente plastico, e se la forza  $F$  è una forza di natura alternata, variabile nel tempo, il comportamento può essere più complesso. Tuttavia è ancora possibile individuare un valore dello spostamento  $x_{\max}$  oltre il quale si ha un degrado limite, e ancora si definisce duttilità il rapporto tra  $x_{\max}$  e lo spostamento al limite elastico.

Se  $F$  è una forza esterna, applicata staticamente, al raggiungimento del valore  $F_0$  la struttura diventa un meccanismo, e gli spostamenti diventano indefiniti: è questo la condizione di collasso. Sia ora  $F=F(t)$  è una forza applicata dal movimento sismico ai piedritti, caratterizzato da un accelerogramma  $\ddot{y}(t)$  scelto in modo tale che  $F$  raggiunga per un breve istante il valore  $F_0$ . Questa condizione di carico non necessariamente coincide con il collasso della struttura. E' una condizione raggiunta per un breve tempo, durante il quale la struttura ha uno spostamento attorno al valore limite  $x_0$  e può avere uno spostamento residuo non nullo.

Applicando alla struttura un accelerogramma  $c\ddot{y}(t)$ , con  $c > 1$ , gli spostamenti massimi saranno maggiori di  $x_0$ , ma ancora la struttura potrà essere dichiarata agibile, ancorché danneggiata, purché lo spostamento massimo sia inferiore al valore  $x_{\max}$  entro il quale la struttura è duttile. Si può dimostrare che esiste una semplice relazione tra la duttilità  $\mu$ , lo spostamento massimo  $x_{\max}$  e il coefficiente moltiplicativo  $c$ . Ciò consente di evitare di dover compiere analisi non-lineari in fase di progetto, e stabilisce una procedura di verifica anche per il sisma più severo atteso sul sito, sisma che può indurre un comportamento oltre il limite elastico.

Si effettuano al proposito due analisi: una volta a verificare che la struttura nel suo complesso e gli elementi che la compongono abbiano una certa duttilità. La seconda è un'analisi lineare basata su uno spettro di risposta ridotto, detto *spettro di progetto*. Questa riduzione è ottenuta introducendo un coefficiente "q" detto *coefficiente di struttura*, legato alla duttilità della struttura e dei singoli elementi componenti. Queste considerazioni stanno a fondamento delle moderne normative per la progettazione delle costruzioni in zona sismica.