ONDE SISMICHE: TEORIA MATEMATICA

Marco BOZZA *

* *Ingegnere Strutturale, già Direttore della Federazione regionale degli Ordini degli Ingegneri del Veneto (FOIV), Amministratore di ADEPRON*

INTRODUZIONE

Un terremoto consiste in una sorgente che irradia energia attraverso il terreno, e che si propaga sotto forma di *onde sismiche*, la quali raggiungendo una struttura ne determinano lo scuotimento. In questo capitolo si fornisce una breve trattazione analitica dei modelli matematici delle onde sismiche, le quali possono essere catalogate in due grandi categorie:

- *onde di volume;*
- *onde di superficie.*

ONDE DI VOLUME

Si consideri un materiale omogeneo, isotropo, elastico lineare indefinito. Si assuma l'ipotesi che il materiale non dissipi energia elastica nella sua deformazione, insieme all'ipotesi di piccoli spostamenti e forze di volume trascurabili. Partendo dalle equazioni indefinite di equilibrio e di congruenza, si dimostra che le equazioni del moto per un volume elementare di tale materiale assumono, in un riferimento cartesiano (x, y, z), la forma seguente:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{s} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \mathbf{s}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{s} \tag{1}$$

essendo:
s = (u,v,w) il vettore delle componenti cartesiane dello spostamento;
ρ la densità del materiale;
$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ l'operatore vettoriale gradiente;
$\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2)$ l'operatore scalare di Laplace;
λ e μ = costanti elastiche di Lamé, funzioni dei moduli elastico E e tangenziale G del materiale;
t = tempo.

La (1) in componenti cartesiane assume le seguenti espressioni:

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \tag{2}$$

$$\mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} v \tag{3}$$

$$\mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} w \tag{4}$$

dove si è indicato con:

$$\Delta = \nabla \mathbf{s} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{5}$$

la deformazione unitaria di volume (dilatazione cubica). Dalle relazioni (2), (3) e (4) si dimostra che è possibile ricavare le seguenti equazioni:

$$\nabla^2 \Delta = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \tag{6}$$

(7) $$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{\omega}$$

essendo $\boldsymbol{\omega}$=½rot(**s**) il vettore rotazione, pari alla metà del rotore del campo vettoriale **s** degli spostamenti. Ora il modello matematico più generale descrivente la propagazione delle onde in un mezzo è dato dalla seguente equazione differenziale alle derivate parziali:

(8) $$\nabla^2 A = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A$$

nella quale A è l'effetto (scalare o vettoriale) che si propaga nel mezzo con velocità V.
Si vede allora che la (1) rappresenta allora la propagazione di due tipi di onde: *onde primarie*, o *onde P*, e *onde secondarie*, o *onde S*. Le onde P ed S sono definite *onde di volume*.

Onde Primarie (onde P)
Confrontando la (6) con la (8) si vede che la (6) esprime la propagazione ondosa della dilatazione cubica Δ con velocità:

(9) $$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Il significato fisico delle onde P e delle onde S può essere facilmente dedotto analizzando la propagazione monodimensionale, ad esempio lungo x. Ponendo allora $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ l'equazione (6) diventa:

(10) $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

La (10) mostra che le onde P comportano spostamenti nella direzione di propagazione. Per effetto di queste onde un elemento di volume subisce una serie di successive compressioni e rarefazioni, conservando inalterata la propria forma (Figura 1). Per questo motivo le onde P sono anche chiamate *onde di compressione*.

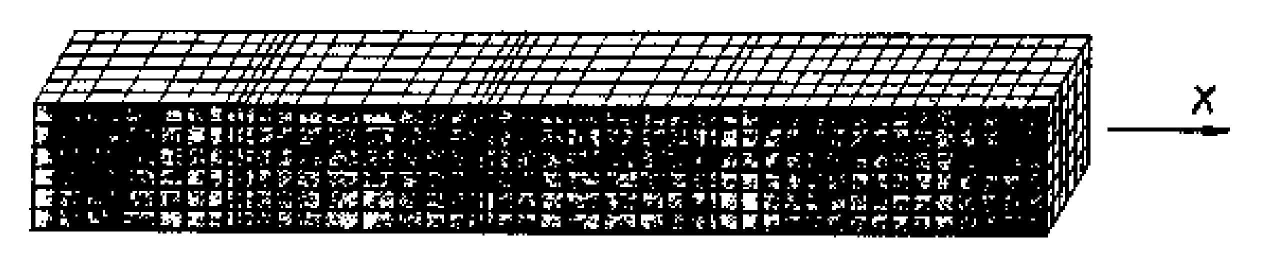

Figura 1

Onde Secondarie (onde S)
Analogamente, il confronto della (7) con la (8) dimostra che la (7) esprime la propagazione ondosa della rotazione $\boldsymbol{\omega}$ con velocità:

(11) $$V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Poiché risulta che $V_P > V_S$, le onde governate dalla (6) sono dette *onde primarie* (o *onde P*), mentre le onde governate dalla (7) sono dette *onde secondarie* (o *onde S*), e questo giustifica il loro nome. Analogamente, ponendo, invece, $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ nell'equazione (7) otteniamo in componenti cartesiane le seguenti equazioni:

(12) $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

(13) $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

La (12) e la (13) mostrano, invece, che le onde S inducono spostamenti puramente ortogonali alla direzione di propagazione. Un generico elemento di volume attraversato da queste onde subisce una serie di successive distorsioni, conservando inalterato il proprio volume (Figura 2). Per questo motivo le onde S sono anche chiamate *onde di taglio*.

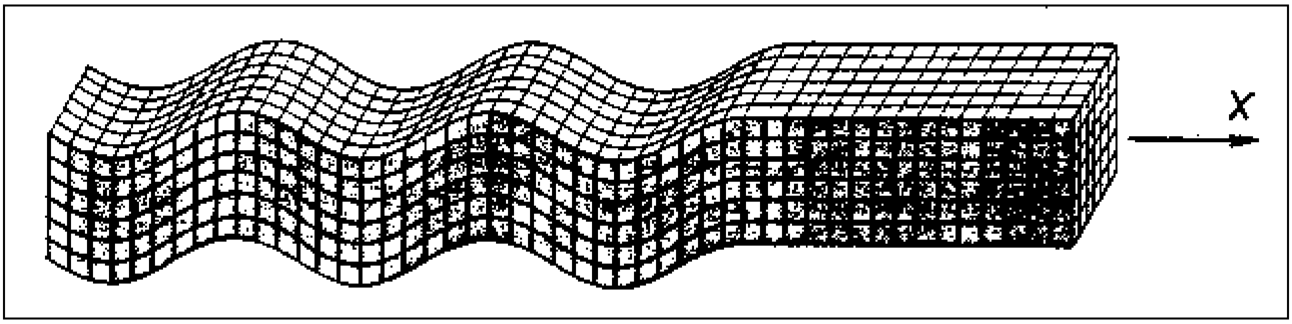

Figura 2

ONDE DI SUPERFICIE

Si è quindi dimostrato che attraverso un mezzo continuo elastico, omogeneo, isotropo, indefinito possono propagarsi due e soltanto due tipi di onde, le onde primarie P e le onde secondaria S. La presenza di una superficie libera determina la propagazione, in prossimità di questa, di una nuova classe di onde, le *onde di superficie*. Esse si formano quando l'energia di vibrazione delle onde sismiche si propaga dagli strati profondi verso la superficie terrestre. Queste onde posseggono caratteristiche simili alle onde gravitazionali che perturbano la superficie libera delle masse fluide, dando luogo a moti ondulatori la cui ampiezza tende rapidamente a decrescere verso l'interno.
Si assuma che la superficie di discontinuità coincida con il piano xy, con l'asse z diretto verso l'interno del semi-spazio, e che la direzione della propagazione ondosa sia concorde all'asse x. Come per le onde di volume, anche le onde di superficie appartengono a due categorie distinte: *onde di Rayleigh*, o *onde R*, e *onde di Love*, o *onde L*.

Onde di Rayleigh (onde R)
Si dimostra che una generica particella solida, investita da un'onda di Rayleigh (detta anche *onda R*), tende a oscillare sia in direzione x che in direzione z, seguendo di fatto un'orbita ellittica (Figura 3). Le ampiezze u degli spostamenti lungo x tendono rapidamente a decrescere verso l'interno del mezzo, mentre le ampiezze w lungo z decrescono con minore rapidità. La velocità di propagazione V_R risulta, approssimativamente:

(14) $$V_R \approx 0{,}92\, V_S$$

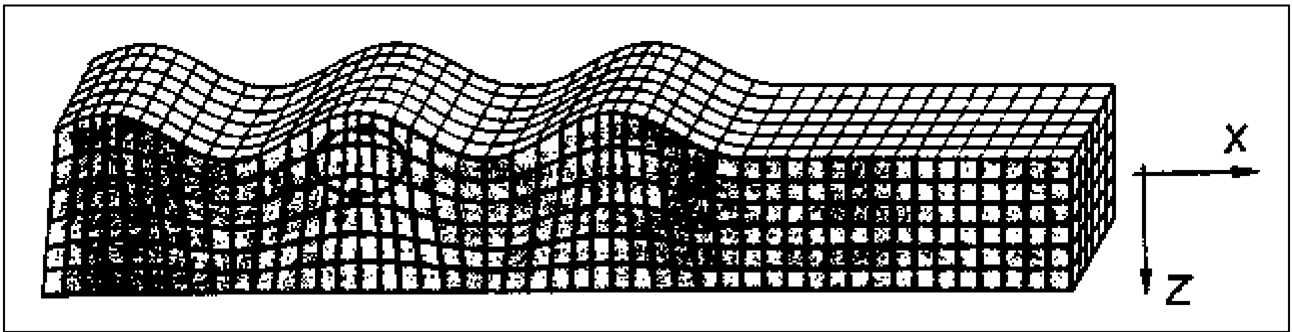

Figura 3

Onde di Love (onde L)
Un'onda di Love (detta anche *onda L*) può propagarsi unicamente attraverso uno strato omogeneo limitato, da un lato, da una superficie libera, dall'altro, da un semispazio le cui caratteristiche meccaniche differiscono da quelle dello strato. Si dimostra che essa produce spostamenti v in direzione y delle sole particelle (Figura 4). La velocità di propagazione V_L è intermedia fra la velocità delle onde di taglio dello strato e la velocità delle onde di taglio del semispazio.

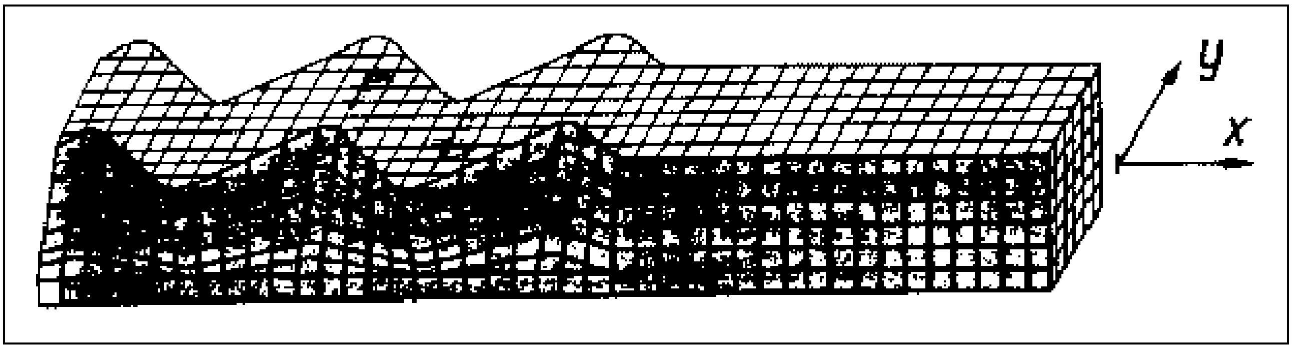

Figura 4