VALORI MASSIMI DEI PARAMETRI DI SOLLECITAZIONE: COMBINAZIONE DELLE RISPOSTE MODALI

Marco BOZZA *

** Ingegnere Strutturale, già Direttore della Federazione regionale degli Ordini degli Ingegneri del Veneto (FOIV), Amministratore di ADEPRON*

INTRODUZIONE

In ambito progettuale è di interesse primario conoscere i valori massimi dei parametri strutturali che maggiormente condizionano la progettazione esecutiva della costruzione, come ad esempio il taglio massimo alla base o lo spostamento massimo di un punto di controllo particolare. Normalmente la valutazione dei parametri strutturali che caratterizzano il comportamento dinamico, e quindi le relative sollecitazioni, la si ottiene realizzando un modello computazionale della struttura (modello ad elementi finiti MDOF). Nell'ipotesi di un comportamento strutturale di tipo elastico lineare, l'analisi della risposta, ovvero la valutazione degli effetti dell'azione sismica, può essere effettuata mediante l'impiego dell'*Analisi Dinamica Multimodale con Spettro di Risposta*, detta più semplicemente *Analisi Modale*.

Come si è detto, lo *spettro di risposta* $S(T,\xi)$ fornisce (per un valore specifico di ξ) i massimi (in termini di spostamento, velocità o accelerazione) della risposta di un sistema SDOF al variare del suo periodo T, quando esso è soggetto ad un accelerogramma caratterizzato da un'accelerazione di picco al suolo che definisce proprio il valore di ancoraggio (per T = 0) dello spettro stesso. Ovviamente, in sede di progetto, e quindi di modellazione strutturale, gli spettri di risposta che vengono effettivamente utilizzati non sono quelli riferiti ad accelerogrammi reali, ma sono quelli indicati nelle normative sismiche, ottenuti mediante complesse procedure di tipo statistico-probabilistiche applicate a moltissimi accelerogrammi "veri".

ANALISI MODALE DEI SISTEMI MDOF

Come accennato, nell'ipotesi che per un sistema strutturale a N gradi di libertà valgano le condizioni per l'applicabilità dell'Analisi Modale, ovvero per la struttura si ipotizza, in via rigorosa o sufficientemente approssimata, un comportamento elastico lineare (sistemi lineari MDOF), il suo comportamento dinamico effettivo $\mathbf{x}(t)$ può essere ottenuto come combinazione lineare di N *risposte modali* relative agli N modi di vibrare $\mathbf{\Phi}_n$ del sistema, secondo la relazione:

(1) $$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \Psi_n(t) \cdot \mathbf{\Phi}_n = [\Phi] \cdot \mathbf{\Psi}(t)$$

essendo $[\Phi]$ la *matrice modale*. Con questa trasformazione di coordinate le equazioni del moto (equazioni disaccoppiate) del sistema assumono la seguente forma:

(2) $$\ddot{\Psi}_n(t) + 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot \dot{\Psi}_n(t) + \omega_n^2 \cdot \Psi_n(t) = L_n \cdot \ddot{x}_s(t) \qquad 1 \le n \le N$$

nella quale ξ_n è il *rapporto di smorzamento modale* e L_n il *coefficiente di partecipazione modale*. Per la linearità della struttura, poi, ciascun effetto E(t) (parametro di sollecitazione o deformazione), dovuto all'azione sismica, che sia funzione lineare delle $x_n(t)$ (componenti di $\mathbf{x}(t)$) è anche funzione lineare delle $\Psi_n(t)$, scrivendo:

(3) $$E(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cdot \Psi_n(t)$$

con A_n opportuni coefficienti di combinazione. La (3) può essere vista come la somma, estesa a tutte le risposte modali, dei singoli contributi dei parametri $E_n(t)$ relativi a ciascun n-esimo modo

(4) $$E(t) = \sum_{n=1}^{N} E_n(t) \qquad E_n(t) = A_n \cdot \Psi_n(t)$$

Per esempio, se E(t) rappresenta il taglio alla base di un edificio multipiano si dimostra che $A_n=\Lambda_n\omega_n^2$, essendo Λ_n il fattore modale dell'azione sismica.

Impostazione del problema
Come visto, mediante l'Analisi Modale la risposta della struttura in termini di effetti E (sollecitazioni o spostamenti) è ottenuta come somma di N effetti E_n (se N è il numero dei gradi di libertà del sistema), ognuno relativo all'n-esimo modo di vibrare della struttura, calcolati risolvendo le N equazioni (2) dei sistemi SDOF nei quali viene *disaccoppiato* il sistema MDOF.
Come anticipato all'inizio, il problema che si pone è quello relativo alla valutazione dei valori massimi di E, valori che saranno successivamente considerati in fase progettuale per il dimensionamento degli elementi strutturali. In relazione a questo problema, l'analisi dinamica del modello computazionale richiede inizialmente che si specifichi la metodologia che deve essere adottata per il calcolo dei massimi. Nell'ambito dell'analisi modale, tale metodologia costituisce una procedura approssimata in ordine a due scelte precise:

- *numero dei modi da considerare nell'analisi;*
- *criteri per la valutazione dei valori massimi.*

NUMERO DEI MODI DA CONSIDERARE NELL'ANALISI

Una corretta applicazione dell'Analisi Modale, prevede di considerare, nella sommatoria della la (1), N modi di vibrare. Ciò implica che, se il numero dei gradi di libertà del modello strutturale è elevato, l'onere computazionale connesso al calcolo degli autovalori (frequenze angolari) ed autovettori (modi di vibrare) dei singoli sistemi SDOF può diventare notevole. Tuttavia, per la determinazione dei parametri modali e quindi di sollecitazione, non è necessario considerare tutti gli N modi di vibrare. In particolare, è possibile trascurare, con sufficiente approssimazione, i modi caratterizzati dalle frequenze ω_n più alte: questo fondamentalmente per due motivi:

(1) I coefficienti di partecipazione modale decrescono al crescere delle frequenze:
questo è dovuto al fatto fisico che gli autovettori corrispondenti alle frequenze maggiori hanno un più elevato numero di intersezioni con la fondamentale e pertanto partecipano meno al moto sismico;

(2) l'influenza dell'azione sismica sui modi di vibrare decresce al crescere delle frequenze:
questo è dovuto al fatto fisico che, a parità di coefficienti di partecipazione modale, il sisma ha una potenza apprezzabile nel campo delle medie e basse frequenze e pertanto il moto sismico influenza poco i modi corrispondenti alle alte frequenze.

Tenendo conto di queste osservazioni le norme sismiche suggeriscono giustamente di considerare nell'analisi solamente i primi M modi di vibrare ($M < N$). Analiticamente ciò equivale a troncare la sommatoria (1) a soli M contributi:

(5) $$\mathbf{x}(t) \approx \sum_{n=1}^{M} \Psi_n(t) \cdot \mathbf{\Phi}_n \qquad M < N$$

Per quanto detto la relazione (5) esprime il fatto che è sufficiente utilizzare un numero di modi limitato per ottenere una risposta adeguatamente realistica.

Criteri dell'Eurocodice 8
Nella (5) deve essere tenuto in debito conto la risposta di ogni modo di vibrare che dà un contributo significativo alla risposta globale della struttura. Il problema che ora si pone è proprio quello di valutare M in modo tale che il calcolo della risposta risulti, agli effetti pratici, sufficientemente accurato. A tal fine l'Eurocodice 8 suggerisce di adottare uno dei seguenti criteri:

il numero M di modi da considerare nell'analisi dinamica deve essere tale che:

(A) la somma delle masse modali effettive associate ai modi considerati rappresenti almeno il 90% della massa totale della struttura;

(B) vengano presi in considerazione tutti i modi caratterizzati ciascuno da una massa modale effettiva maggiore del 5% della massa totale della struttura.

Si ricorda che la *massa modale effettiva* associata all'n-esimo modo di vibrare vale:

(6) $$M_n^e = \frac{\left(\boldsymbol{\Phi}_n^T \cdot [M] \cdot \mathbf{I}\right)^2}{\boldsymbol{\Phi}_n^T \cdot [M] \cdot \boldsymbol{\Phi}_n}$$

essendo **I** il vettore che caratterizza la direzione dell'azione sismica rispetto alla direzione delle traslazioni relative all'n-esimo modo. La massa modale effettiva rappresenta la frazione della massa totale M* della struttura che l'n-esimo modo di vibrare riesce ad eccitare durante l'evento sismico. In forma analitica il criterio A) dell'Eurocodice 8 si pone nella forma:

(7) $$\sum_{n=1}^{M} M_n^e \geq 0{,}9 \cdot M^*$$

CRITERI PER LA VALUTAZIONE DEI VALORI MASSIMI

Noto il numero M da considerare nell'analisi dinamica, rimane da valutare come calcolare E_{max}, valore massimo dell'effetto E da utilizzare in fase di progetto. A tal fine la procedura da seguire si esplica attraverso due fasi:

- *calcolo dei singoli valori massimi delle risposte modali;*
- *calcolo del valore massimo mediante due metodi di combinazione modale (SRSS e CQC).*

Calcolo dei singoli valori massimi delle risposte modali
Per ciascun modo di vibrare si calcola il valore massimo dell'effetto E, il quale per la (4), è dato da:

(8) $$E_n^{max} = A_n \cdot \Psi_n^{max}$$

E' noto ora che:

(9) $$\Psi_m^{max} \approx \frac{L_n}{\omega_n} \cdot X_n^{max}$$

avendo indicato con X_n^{max} il valore massimo dell'integrale di Duhamel per l'n-esimo modo di vibrare, il quale, per definizione, rappresenta il valore dello spettro di risposta in termini di velocità (detta anche *pseudo-velocità* o *velocità spettrale*) $S_v^n(T_n,\xi_n)$, con $T_n=2\pi/\omega_n$. Poiché nella realtà normalmente lo spettro di risposta è espresso in termini di accelerazione (detta anche *pseudo-accelerazione* o *accelerazione spettrale*) $S_a^n(T_n,\xi_n)$, indicando con $S_d^n(T_n,\xi_n)$ lo spettro in termini di spostamento, e valendo le seguenti espressioni:

(10) $$S_d^n(T_n, \xi_n) = \frac{S_v^n(T_n, \xi_n)}{\omega_n} = \frac{S_a^n(T_n, \xi_n)}{\omega_n^2}$$

possiamo riscrivere la (9) nella forma:

(11) $$\Psi_n^{max} \approx \frac{L_n}{\omega_n^2} \cdot S_a^n(T_n, \xi_n)$$

e quindi la (8) come:

(12) $$E_n^{max} \approx \frac{A_n \cdot L_n}{\omega_n^2} \cdot S_a^n(T_n, \xi_n)$$

La relazione (12) esprime quindi il valore massimo dell'effetto E relativo all'n-esimo modo di vibrare. Tuttavia E_{max} non lo si calcola dalla (4) per semplice sostituzione dei termini espressi dalla (12), ovvero come:

(13) $$E_{max} = \sum_{n=1}^{M} E_n^{max} \qquad M < N$$

Ciò è dovuto al fatto che, poiché lo spettro $S(T,\xi)$ non dà informazioni sugli istanti in cui avvengono i massimi della risposta, in generale questi massimi non si verificano nello stesso istante. L'utilizzo della relazione (13) conduce a sovrastimare eccessivamente E_{max}, e di conseguenza porta ad un sovradimensionamento non giustificato della struttura. Per tenere conto di quanto detto sono state proposte in letteratura diverse formulazioni analitiche per il calcolo del valore statisticamente più probabile di E_{max} mediante la combinazione dei valori modali E_n^{max}. L'Eurocodice 8, in particolare, ne suggerisce due:

- *Combinazione Euclidea (SRSS);*
- *Combinazione Quadratica Completa (CQC).*

Combinazione Euclidea (SRSS)
Le risposta di due modi di vibrare generici n e m (che includano sia i modi traslazionali che torsionali) possono essere considerate come indipendenti (modi non correlati) quando i loro rispettivi periodi T_n e T_m differiscono uno dall'altro per non meno del 10%, ovvero quando soddisfano la seguente condizione:

(14) $$T_m \le 0{,}9\ T_n$$

Se la relazione (14) vale per tutte le risposte modali (risposte indipendenti le une dalle altre), si dimostra che statisticamente il valore più probabile di E_{max} può essere calcolato con la *Combinazione Euclidea SRSS* (*Square Root of the Sum of Squares*):

(15) $$E_{max} = \sqrt{\sum_{n=1}^{M} \left(E_n^{max}\right)^2} \qquad M < N$$

Questa relazione fornisce valori mediamente ben approssimati ed è attualmente la più utilizzata.

Combinazione Quadratica Completa (CQC)
Si osservi, invece, che se la relazione (14) non è verificata, esistono modi di vibrare con periodi T_n e T_m molto vicini tra loro, ovvero è molto probabile che i valori E_n^{max} e E_m^{max} si possano verificare quasi contemporaneamente. Conseguentemente il contributo di questi modi a E_{max} sotto radice nella (15) si avvicina al valore $(E_n^{max}+ E_m^{max})^2$ perché essi tendono a diventare simultanei. In tale ipotesi la (15) va allora corretta in modo tale che, oltre alla somma $(E_n^{max})^2+(E_m^{max})^2$, compaia un termine addizionale che, al limite per $T_n=T_m$, sia pari a $2\ E_n^{max}\ E_m^{max}$.

Per questo motivo, quando i periodi dei modi di vibrare non soddisfano la (14), proprio per tenere conto di questi contributi aggiuntivi, l'Eurocodice 8 suggerisce di calcolare E_{max} con un'espressione più generale, la *Combinazione Quadratica Completa CQC* (*Complete Quadratic Combination*):

(16) $$E_{max} = \sqrt{\sum_{n=1}^{M} \sum_{m=1}^{M} E_n^{max} \cdot \rho_{nm} \cdot E_m^{max}} \qquad M < N$$

nella quale:

(17) $$\rho_{nm}=\rho_{mn}=\frac{8\cdot\sqrt{\xi_n\xi_m}\cdot\left(\xi_n+r_{nm}\xi_m\right)\cdot\sqrt{r_{nm}^3}}{\left(1-r_{nm}^2\right)^2+4\cdot\xi_n\xi_m\cdot r_{nm}\left(1+r_{nm}^2\right)+4\cdot\left(\xi_n^2+\xi_m^2\right)\cdot r_{nm}^2}$$

è il *coefficiente di correlazione* tra il modo n e il modo m, essendo $r_{nm}=\omega_n/\omega_m$ il rapporto tra le frequenze angolari dei modi n e m, con $\omega_n \le \omega_m$.
Nell'ipotesi che il *rapporto di smorzamento modale* sia costante per tutti i modi di vibrare ($\xi_n = \xi_m = \xi$), la (17) assume l'espressione semplificata:

(18) $$\rho_{nm} = \frac{8 \cdot \xi^2 \cdot \left(1+r_{nm}\right) \cdot \sqrt{r_{nm}^3}}{\left(1-r_{nm}^2\right)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot r_{nm} \cdot \left(1+r_{nm}\right)^2}$$

Si noti che $0 \le \rho_{nm} \le 1$ e che $\rho_{nn} = \rho_{mm} =1$. Per $\omega_n << \omega_m$ (ipotesi (14)) la (16) tende a coincidere con la (15).