ANALISI DINAMICA NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

Marco BOZZA *

** Ingegnere Strutturale, già Direttore della Federazione regionale degli Ordini degli Ingegneri del Veneto (FOIV), Amministratore di ADEPRON*

INTRODUZIONE

In generale la forzante p(t) agente sui sistemi reali è una funzione che si ipotizza nota, e che assume valori specifici in funzione del tempo t. Questa induce nei sistemi una risposta, anch'essa funzione del tempo, in termini di parametri meccanici (spostamento, velocità, accelerazione) e di caratteristiche di sollecitazione (momento, taglio, sforzo assiale). Normalmente la risposta viene valutata mediante l'Analisi nel Dominio del Tempo, la quale fornisce lo spostamento appunto in funzione del tempo.
Un metodo per il calcolo della risposta alternativo a questa procedura può essere eseguito mediante *l'Analisi nel Dominio delle Frequenze*. L'utilizzo di questo metodo è essenziale, ad esempio, nei casi in cui i parametri strutturali che definiscono il moto del sistema siano funzioni della frequenza. La procedura, analogamente al caso di sistemi soggetti a forzanti periodiche, consiste nel valutare le componenti armoniche, con ampiezze complesse, della forzante p(t) e per ognuna di queste calcolare la risposta del oscillatore. Per la linearità del sistema, la risposta totale è ottenuta come somma (infinita) di tutte queste risposte.

SISTEMI CON SMORZAMENTO SOTTO-CRITICO

Si ricorda che nell'Analisi nel Dominio del Tempo, un sistema SDOF con smorzamento sotto-critico ($\xi < 1$) avente un'equazione del moto del tipo:

(1) $$\ddot{x}(t) + 2 \cdot \omega \cdot \xi \cdot \dot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = \frac{p(t)}{M}$$

ha per soluzione, con condizioni iniziali $x(0)=dx(t)/dt\,|_{t=0} = 0$, una funzione integrale, detta *Integrale di Duhamel*, data da:

(2) $$x(t) = \int_0^t p(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

Nella (2):

(3) $$h(t-\tau) = \frac{1}{M \cdot \omega_D} \cdot \sin(\omega_D (t-\tau)) \cdot \exp(-\xi \cdot \omega (t-\tau))$$

è la *Funzione di Risposta all'Impulso*, detta anche *Funzione di Risposta nel Dominio del Tempo* del sistema, dove si è posto:

(4) $$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \qquad \xi = \frac{C}{2 \cdot M \cdot \omega} \qquad \omega_D = \omega \cdot \sqrt{1-\xi^2}$$

E' noto ora che se una generica funzione p(t) soddisfa la *Condizione di Convergenza Uniforme di Dirichlet:*

(5) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)| \cdot dt \prec \infty$$

ovvero esiste ed è finito il valore dell'integrale (5), valgono le seguenti relazioni:

(6) $$p(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(i \cdot \omega^*\right) \cdot \exp\left(i \cdot \omega^* \cdot t\right) \cdot d\omega^*$$

(7) $$P\left(i \cdot \omega^*\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \cdot \exp\left(-i \cdot \omega^* \cdot t\right) \cdot dt$$

La (6) e la (7) sono dette, rispettivamente, *Trasformata Inversa di Fourier* e *Trasformata Diretta di Fourier* della funzione p(t). Poiché vale la ben nota relazione :

(8) $$P\left(i \cdot \omega^*\right) \cdot \exp\left(i \cdot \omega^* \cdot t\right) = \left|P\left(i \cdot \omega^*\right)\right| \cdot \exp\left(i \cdot \left(\omega^* \cdot t + \vartheta\right)\right) = \left|P\left(i \cdot \omega^*\right)\right| \cdot \left[\cos \cdot \left(\omega^* \cdot t + \vartheta\right) + i \cdot \sin \cdot \left(\omega^* \cdot t + \vartheta\right)\right]$$

essendo $|P(i\omega^*)|$ il modulo di $P(i\omega^*)$ e ϑ la sua fase, la (6) afferma che la generica forzante p(t) può essere interpretata come somma di infinite forzanti armoniche distribuite con continuità nel dominio $0 < \omega^* < \infty$, ed aventi ampiezze complesse $P(i\omega^*)$ note date dalla (7). Nella (6) $P(i\omega^*)/2\pi$ rappresenta il vettore dell'ampiezza complessa alla frequenza ω^* e per unità di ω^*. In tal modo, poiché il sistema è lineare, l'effetto di p(t) sul sistema equivale alla somma degli effetti che ciascuna di queste componenti esercita sul sistema stesso. L'equazione del moto di un sistema smorzato SDOF soggetto alla forzante armonica data dalla (8), in corrispondenza di una generica frequenza ω^*, si scrive come:

(9) $$\ddot{x}_{\omega^*}(t) + 2 \cdot \omega \cdot \xi \cdot \dot{x}_{\omega^*}(t) + \omega^2 \cdot x_{\omega^*}(t) = \frac{1}{M} \cdot P\left(i \cdot \omega^*\right) \cdot \exp\left(i \cdot \omega^* \cdot t\right)$$

e si dimostra che ha per soluzione (risposta):

(10) $$x_{\omega^*}(t) = X\left(i \cdot \omega^*\right) \cdot \exp\left(i \cdot \omega^* \cdot t\right) = \left|X\left(i \cdot \omega^*\right)\right| \cdot \exp\left(i \cdot \left(\omega^* \cdot t + \psi\right)\right)$$

nella quale:

(11) $$X\left(i \cdot \omega^*\right) = \frac{P\left(i \cdot \omega^*\right)}{K + M \cdot \left(i \cdot \omega^*\right)^2 + \left(i \cdot \omega^*\right) \cdot C} = \frac{1}{K} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \beta^2\right) + i \cdot \left(2 \cdot \xi \cdot \beta\right)}\right] \cdot P\left(i \cdot \omega^*\right) \qquad \beta = \frac{\omega^*}{\omega}$$

e ψ la fase tra la risposta e la forzante.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO ARMONICO

La (11) può essere scritta nella forma:

(12) $$X\left(i \cdot \omega^*\right) = H\left(i \cdot \omega^*\right) \cdot P\left(i \cdot \omega^*\right)$$

dove si è posto:

(13) $$H\left(i \cdot \omega^*\right) = \frac{1}{K} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \beta^2\right) + i \cdot \left(2 \cdot \xi \cdot \beta\right)}\right]$$

$H(i\omega^*)$ è una funzione complessa della variabile reale ω^*, e prende il nome di *Funzione di Trasferimento Armonico*, ovvero *Funzione di Risposta nel Dominio delle Frequenze*. Essa rappresenta la risposta del sistema per una forzante armonica unitaria. Prendendo il modulo della (12) si ottiene:

(14) $$\left|X\left(i \cdot \omega^*\right)\right| = \left|H\left(i \cdot \omega^*\right)\right| \cdot \left|P\left(i \cdot \omega^*\right)\right|$$

Il modulo della funzione $H(i\omega^*)$ è detto *Guadagno* del sistema alla pulsazione ω^* e vale:

(15) $$\left|H\left(i\cdot\omega^*\right)\right| = \frac{1}{K}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+\left(2\cdot\xi\cdot\beta\right)^2}}$$

Dalla (12) emerge chiaramente il significato fisico della Funzione di Trasferimento Armonico: la risposta X(iω*) si ottiene come prodotto della forzante P(iω*) per H(iω*). In questa ottica il sistema è visto come un blocco avente un ingresso (la forzante P(iω*)) e un'uscita (la risposta X(iω*) alla forzante), cosicché la (10) assume la seguente forma finale:

(16) $$x_{\omega^*}(t) = H\left(i\cdot\omega^*\right)\cdot P\left(i\cdot\omega^*\right)\cdot \exp\left(i\cdot\omega^*\cdot t\right)$$

Ricordando quanto detto in precedenza, per la (6) la risposta totale del sistema si ottiene allora come somma infinita di questi contributi, ovvero:

(17) $$x(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} H\left(i\cdot\omega^*\right)\cdot P\left(i\cdot\omega^*\right)\cdot \exp\left(i\cdot\omega^*\cdot t\right)\cdot d\omega^*$$

La risposta (17) è l'analoga, nel dominio delle frequenze ω*, della (2) nel dominio del tempo t. Si dimostra che la Funzione di Risposta nel Dominio delle Frequenze H(iω*) è legata alla Funzione di Risposta nel Dominio del Tempo h(t) attraverso le seguenti relazioni:

(18) $$H\left(i\cdot\omega^*\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cdot \exp\left(-i\cdot\omega^*\cdot t\right)\cdot dt$$

(19) $$h(t) = \frac{1}{2\,\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} H\left(i\cdot\omega^*\right)\cdot \exp\left(i\cdot\omega^*\cdot t\right)\cdot d\omega^*$$

Da queste espressioni si vede subito che la Funzione di Trasferimento Armonico H(iω*) altro non è che la trasformata diretta di Fourier della Funzione di Risposta all'Impulso h(t).