DINAMICA DELLE VIBRAZIONI LIBERE DEI SISTEMI A UN GRADO DI LIBERTÁ (SDOF)

Marco BOZZA *

** Ingegnere Strutturale, già Direttore della Federazione regionale degli Ordini degli Ingegneri del Veneto (FOIV), Amministratore di ADEPRON*

INTRODUZIONE

In questo articolo si analizza la dinamica dei sistemi a un grado di libertà, o sistemi *SDOF (Single-Degree-Of-Freedom)* non soggetti a forzanti esterne, ovvero l'analisi della loro risposta come vibrazioni libere. Sistemi a un grado di libertà significa che la loro generica deformata è individuata da un solo parametro, ad esempio la coordinata x del traverso rigido del portale di Figura 1. Assumendo l'ipotesi che tali sistemi abbiano un comportamento elastico lineare, le proprietà fisiche fondamentali necessarie a caratterizzarne completamente la risposta sono la *massa inerziale* M, lo *smorzamento viscoso* C (è indicato con b nella Figura 1) e la *rigidezza elastica* K.

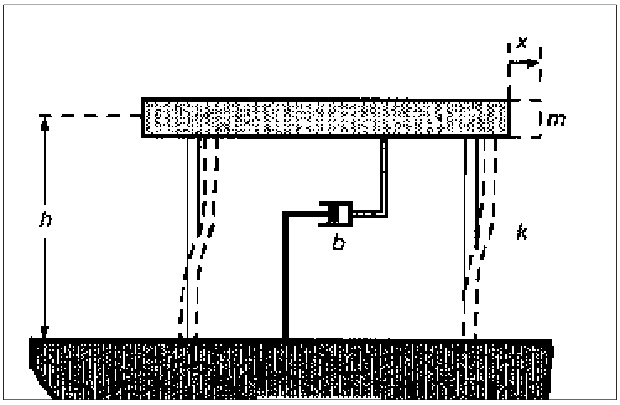

Figura 1

Considerando allora che uno di questi sistemi non sia soggetto a forze esterne, applicando il principio di D'Alambert, l'equazione del moto (vibrazioni libere) si scrive nella forma:

(1) $$M \cdot \ddot{x}(t) + C \cdot \dot{x}(t) + K \cdot x(t) = 0$$

dove si è posto:

(2) $$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

Nel membro di sinistra nella (1) il primo termine è la *forza d'inerzia*, il secondo termine è la *forza di smorzamento* e il terzo termine è la *forza elastica*. Si dimostra che l'equazione del moto non è influenzata dalla forza peso della massa M, anche se la direzione di x coincide con quella della forza peso. L'analisi delle vibrazioni libere, ovvero la soluzione della (1), può essere condotta in due casi:

sistema non smorzato (C = 0)
sistema smorzato (C ≠ 0)

VIBRAZIONI LIBERE DEL SISTEMA NON SMORZATO

Se il sistema non è smorzato (C = 0) l'equazione del moto (1) si riduce alla forma:

(3) $$M \cdot \ddot{x}(t) + K \cdot x(t) = 0$$

ovvero anche:

(4) $$\ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

dove si è indicato con:

(5) $$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

la *pulsazione angolare* del sistema. La soluzione della (4) è una funzione del tipo:

(6) $$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

con A e B delle costanti. Imponendo che la (6) rispetti le condizioni al contorno $x(t)_{t=0}$ e $dx(t)/dt\,|_{t=0}$ si trova:

(7) $$A = x(0) \qquad B = \frac{\dot{x}(0)}{\omega}$$

per cui l'equazione del moto assume la forma finale:

(8) $$x(t) = x(0) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

La (8) rappresenta un moto armonico semplice di *periodo naturale*:

(9) $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

e con considerazioni di tipo puramente geometrico si dimostra facilmente che può essere riscritta nella forma:

(10) $$x(v) = R \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta)$$

nella quale l'*ampiezza* R è data da:

(11) $$R = \sqrt{x(0)^2 + \left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right)^2}$$

e l'*angolo di fase* θ da:

(12) $$\theta = \arctan\left(-\frac{\dot{x}(0)}{\omega \cdot x(0)}\right)$$

Come si vede dall'equazione (10), poiché il sistema non è smorzato, una volta iniziato il moto con le condizioni iniziali di spostamento e velocità esso continua indefinitamente ad oscillare di moto armonico senza mai arrestarsi (proprio perché il sistema non è smorzato).

VIBRAZIONI LIBERE DEL SISTEMA SMORZATO

Per sistemi smorzati ($C \neq 0$) l'equazione del moto è la (1), ed una sua soluzione generale è del tipo:

(13) $$x(t) = A \cdot \exp(s \cdot t)$$

essendo A un'arbitraria costante complessa. Sostituendo la (13) in (1) l'equazione del moto assume la seguente espressione quadratica in s:

(14) $$s^2 + \frac{C}{M} \cdot s + \omega^2 = 0$$

Poiché si suppone che M e K siano fissi per il sistema, si vede che le due soluzioni s della (14) dipendono solo dall'intensità dello smorzamento viscoso C. Queste soluzioni sono date da:

(15) $$s_{1,2} = -\frac{C}{2M} \pm \sqrt{\Delta}$$

dove si è posto:

(16) $$\Delta = \left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \omega^2$$

Per gli sviluppi che seguiranno è utile riscrivere la (15) nella forma:

(17) $$s_{1,2} = -\xi \cdot \omega \pm \omega \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}$$

dove si è indicato con:

(18) $$\xi = \frac{C}{C_c}$$

il *rapporto di smorzamento viscoso*, essendo:

(19) $$C_c = 2M\omega$$

lo smorzamento critico del sistema. Come si vede facilmente le soluzioni s della (17) dipendono dal valore che assume ξ, per cui possono esistere tre casi:

$\xi = 1$ *sistema con smorzamento critico* ($C = C_c$)
$\xi < 1$ *sistema con smorzamento sotto-critico* ($C < C_c$)
$\xi > 1$ *sistema con smorzamento sovra-critico* ($C > C_c$)

Il caso precedente di sistema non smorzato (C = 0) corrisponde a ξ = 0. Si riporta in Figura 2 l'andamento delle oscillazioni libere nei quattro casi citati che ora si analizzeranno in dettaglio.

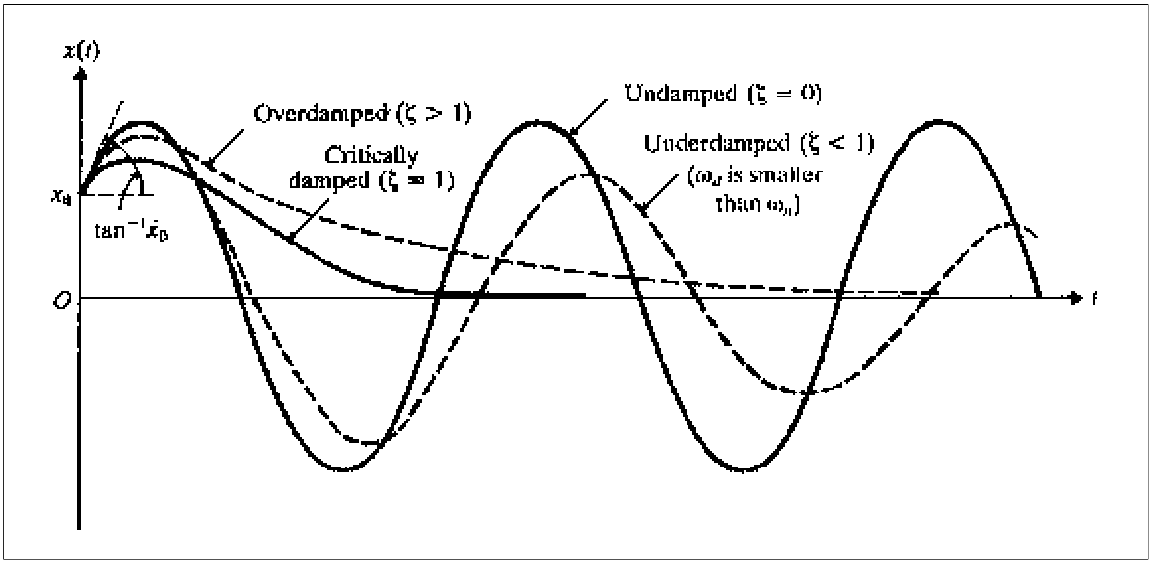

Figura 2

SISTEMA CON SMORZAMENTO CRITICO

In questo caso ($C = C_c$) dalla (17):

(20) $$s_{1,2} = -\omega$$

per cui, tenendo conto della (13) e delle condizioni al contorno, si trova subito la soluzione della (1) nella forma:

(21) $$x(t) = \left[x(0) \cdot (1 + \omega \cdot t) + \dot{x}(0) \cdot t\right] \cdot \exp(-\omega \cdot t)$$

Dall'equazione (21) si vede immediatamente che le vibrazioni libere del sistema con smorzamento critico ($\xi = 1$) consistono in un moto che si smorza asintoticamente a zero (Figura 2). Da questa osservazione ne deriva il significato fisico dello smorzamento critico:
lo smorzamento critico C_c rappresenta il più piccolo valore che può assumere lo smorzamento viscoso C del sistema affinché le proprie vibrazioni libere non siano di tipo oscillante. In altre parole è il valore che assume C nel passaggio delle vibrazioni libere da moto armonico smorzato oscillante a moto smorzato asintoticamente.

SISTEMA CON SMORZAMENTO SOTTO-CRITICO

In questo caso ($C < C_c$) $\Delta < 0$ per cui le soluzioni s della (17) sono complesse:

(22) $$s_{1,2} = -\xi \cdot \omega \pm i \cdot \omega_D$$

dove con:

(23) $$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

si è indicata la frequenza angolare delle vibrazioni libere del sistema smorzato. Com'è ben noto, tenendo conto della (13), la soluzione generale dell'equazione del moto (1) ha la forma seguente:

(24) $$x(t) = \left[A \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_D \cdot t)\right] \cdot \exp(-\xi \cdot \omega \cdot t)$$

Imponendo ancora le condizioni al contorno per t = 0 l'equazione delle vibrazioni libere diventa:

(25) $$x(t) = \left[x(0) \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + \left(\frac{\dot{x}(0) + x(0) \cdot \xi \cdot \omega}{\omega_D}\right) \cdot \sin(\omega_D \cdot t)\right] \cdot \exp(-\xi \cdot \omega \cdot t)$$

Si noti come in questo caso la pulsazione ω_D dell'oscillatore smorzato risulti minore di quella che lo stesso oscillatore avrebbe in assenza di smorzamento. Come si vede dalla (25) il moto è armonico smorzato con periodo (Figura 2):

(26) $$T_D = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_D}$$

In forma più compatta la (25) può essere riscritta come:

(27) $$x(t) = R \cdot \cos(\omega_D \cdot t + \theta) \cdot \exp(-\xi \cdot \omega \cdot t)$$

nella quale l'ampiezza R è data da:

(28) $$R = \sqrt{x(0)^2 + \left(\frac{\dot{x}(0) + x(0) \cdot \xi \cdot \omega}{\omega_D}\right)^2}$$

e l'angolo di fase θ da:

(29) $$\theta = -\arctan\left(\frac{\dot{x}(0) + x(0)\cdot\xi\cdot\omega}{\omega_D\cdot x(0)}\right)$$

E' importante osservare che solo nel caso $\xi < 1$ si verificano le oscillazioni smorzate: è questo il motivo per cui lo smorzamento C_c prende il nome di smorzamento critico. Esso infatti rappresenta un valore di soglia al di sopra del quale non si possono verificare le oscillazioni.

Decremento logaritmico
Poiché per le strutture reali è molto difficile definire lo smorzamento C è pratica comune esprimere C in termini di un rapporto di smorzamento viscoso equivalente ξ determinato sperimentalmente. Innanzi tutto è facile vedere che il rapporto tra due successive ampiezze massime x_n e x_{n+1} dell'oscillazione (27) (che si verificano rispettivamente ai tempi $n\cdot2\pi/\omega_D$ e $(n+1)\cdot2\pi/\omega_D$) è costante, e vale:

(30) $$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \exp\left(\frac{2\cdot\pi\cdot\xi\cdot\omega}{\omega_D}\right)$$

ovvero anche:

(31) $$\delta = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \frac{2\cdot\pi\cdot\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Per piccoli valori di ξ può porsi, dalla (31), con sufficiente approssimazione:

(32) $$\xi \approx \frac{\delta}{2\cdot\pi}$$

Osservando ora che si può scrivere:

(33) $$\delta = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \approx \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}$$

dalla (32) si ricava infine:

(34) $$\xi \approx \frac{x_n - x_{n+1}}{2\cdot\pi\cdot x_{n+1}}$$

La quantità δ definita nella (33) è detta *decremento logaritmico dello smorzamento*, e la sua importanza consiste nella possibilità di determinare in maniera sufficientemente approssimata il rapporto di smorzamento ξ, misurando sperimentalmente i massimi di due ampiezze successive.

SISTEMA CON SMORZAMENTO SOVRA-CRITICO

In questo caso ($C > C_c$) $\Delta > 0$ per cui le soluzioni s della (17) sono del tipo:

(35) $$s_{1,2} = -\xi\cdot\omega \pm \hat{\omega}$$

essendo:

(36) $$\hat{\omega} = \omega\cdot\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Tenendo conto della (13), la soluzione generale dell'equazione del moto (1) ha la forma seguente:

(37) $$x(t) = [A\cdot\cosh(\hat{\omega}\cdot t) + B\cdot\sinh(\hat{\omega}\cdot t)]\cdot\exp(-\xi\cdot\omega\cdot t)$$

dove le costanti A e B si trovano, come al solito, imponendo alla (37) le solite condizioni iniziali per t = 0:

(38) $$x(t) = \left[x(0) \cdot \cosh(\hat{\omega} \cdot t) + \left(\frac{\dot{x}(0) + x(0) \cdot \xi \cdot \omega}{\hat{\omega}} \right) \cdot \sinh(\hat{\omega} \cdot t) \right] \cdot \exp(-\xi \cdot \omega \cdot t)$$

La (38), analogamente alla (21), esprime un moto non oscillatorio con ampiezze tendenti a zero. E' facile vedere inoltre che la risposta del sistema con smorzamento sovra-critico, rispetto a quella del sistema con smorzamento critico, ha una tendenza asintotica a zero più lenta (Figura 2).