DINAMICA SISMICA DEI SISTEMI A N GRADI DI LIBERTÁ (MDOF)

Marco BOZZA *

** Ingegnere Strutturale, già Direttore della Federazione regionale degli Ordini degli Ingegneri del Veneto (FOIV), Amministratore di ADEPRON*

SOMMARIO

In questo articolo viene presentata la dinamica sismica dei sistemi a N gradi di libertà, o sistemi MDOF (Multi-Degree-Of Freedom) affrontata con l'analisi modale. In particolare si farà riferimento alla tipologia strutturale maggiormente adottata per le costruzioni medio grandi in campo civile, ovvero la struttura intelaiata multipiano. Senza perdere di generalità e al fine di esporre quegli elementi utili a definire gli aspetti fisico-matematici del problema di analisi strutturale, si assume uno schema di struttura intelaiata piana. Sebbene tale schema sia difficilmente adottabile per le strutture reali, esso consente di acquisire gli elementi di valutazione concettuale che stanno alla base dei metodi di analisi strutturale più comunemente adottati. L'estensione dei metodi alle strutture intelaiate spaziali aggiunge poco o nulla nella sostanza ai concetti essenziali che ne stanno a fondamento nel caso piano, se non una maggiore quantità di calcoli da eseguire in fase di analisi, affidati comunque a procedure di calcolo automatico ad elementi finiti.

EQUAZIONI DEL MOTO DI UN SISTEMA MDOF

Per fissare le idee si supponga di analizzare una struttura piana costituita da un telaio multipiano (a N traversi) incastrato alla base. Nell'ipotesi che:

- le aste siano indeformabili per sforzi assiali;
- le masse siano concentrate a livello dei traversi;
- le forze esterne siano orizzontali ed applicate a livello dei traversi.

da un punto di vista cinematico la sua deformata è definita in modo univoco dagli spostamenti (vettore **x** a N elementi) dei vari piani, cosicché il sistema in tal caso possiede N gradi di libertà (N DOF). Nelle usuali ipotesi assunte per i sistemi lineari a parametri concentrati con N DOF (*Lumped MDOF Elastic Systems*) l'equazione (vettoriale) delle vibrazioni libere si scrive nella forma:

(1) $$[M] \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) + [C] \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) + [K] \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

nella quale [M] è la *Matrice di Massa*, [C] è la *Matrice di Smorzamento*, [K] è la *Matrice di Rigidezza*, $\mathbf{x}(t)$ è il vettore degli spostamenti nodali, mentre il vettore delle velocità nodali $d\mathbf{x}(t)/dt$, e il vettore delle accelerazioni nodali $d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$ sono indicati, rispettivamente con un punto e due punti. [M], [C] e [K] sono matrici quadrate di ordine N che godono della proprietà di essere *simmetriche* e *definite positive*. Si precisa che il vettore $\mathbf{x}(t)$ esprime gli spostamenti dei nodi relativi alla struttura indeformata, ovvero rispetto ad un riferimento solidale alla base (suolo) della struttura.

Se la base è sollecitata da un'accelerazione orizzontale (azione sismica) definita come la derivata seconda dello spostamento $x_S(t)$ del suolo ($d^2x_S(t)/dt^2$), il sistema risente di una forza esterna pari a:

(2) $$\mathbf{F}_S(t) = [M] \cdot \mathbf{I} \cdot \ddot{x}_S(t)$$

essendo **I** un vettore avente N elementi pari a 1, per cui l'equazione del moto diventa:

(3) $$[M] \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) + [C] \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) + [K] \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_S(t)$$

A rigore nella (3) la forza sismica $\mathbf{F}_S(t)$ dovrebbe avere un segno "–", ma esso è ininfluente al fine dell'analisi strutturale.

DISACCOPPIAMENTO DELLE EQUAZIONI DEL MOTO: EQUAZIONI MODALI

Si indichi ora con ω_n la generica *pulsazione modale*, o *autovalore*, e con $\mathbf{\Phi}_n$ il generico *vettore modale*, o *autovettore*, associato a ω_n. Com'è ben noto ω_n e $\mathbf{\Phi}_n$, che si trovano risolvendo il *Problema agli Autovalori* associato all'equazione (1):

(4) $$[K] \cdot \mathbf{\Phi}_n = \omega_n^2 \cdot [M] \cdot \mathbf{\Phi}_n \qquad 1 \le n \le N$$

rappresentano la pulsazione angolare e la forma modale dell'n-esimo modo di vibrare. Gli autovettori godono della proprietà fondamentale di essere ortogonali rispetto a [M] e [K]:

(5) $$\mathbf{\Phi}_m^T \cdot [M] \cdot \mathbf{\Phi}_n = 0 \qquad m \ne n$$

(6) $$\mathbf{\Phi}_m^T \cdot [K] \cdot \mathbf{\Phi}_n = 0 \qquad m \ne n$$

Imponendo inoltre che i vettori Φ_n siano anche *normalizzati* rispetto a [M], si hanno le relazioni:

(7) $$M_n = \mathbf{\Phi}_n^T \cdot [M] \cdot \mathbf{\Phi}_n \qquad = 1$$

(8) $$K_n = \mathbf{\Phi}_n^T \cdot [K] \cdot \mathbf{\Phi}_n \qquad = \omega_n^2$$

La valutazione della matrice [C] nella (3) non è in generale agevole, pertanto è uso fare un'ipotesi semplificativa: si suppone che gli autovettori, oltre ad essere ortogonali rispetto a [M] e [K], siano ortogonali anche rispetto a [C]:

(9) $$\mathbf{\Phi}_m^T \cdot [C] \cdot \mathbf{\Phi}_n = 0 \qquad m \ne n$$

(10) $$C_n = \mathbf{\Phi}_n^T \cdot [C] \cdot \mathbf{\Phi}_n \qquad = 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n$$

dove ξ_n è un numero positivo, che per le strutture civili è molto minore di 1, cioè $0 \le \xi_n << 1$. Nel caso in cui siano verificate le (9) e (10) si dice che il sistema è *classicamente smorzato*. Si dimostra che questa condizione si verifica quando la matrice [C] soddisfa l'identità $[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C]$.
Le relazioni (5), (6), (7), (8), (9) e (10) consentono di riscrivere l'equazione vettoriale del moto (3) come un sistema di N equazioni modali disaccoppiate nelle incognite (funzioni) $\Psi_n(t)$:

(11) $$M_n \cdot \ddot{\Psi}_n(t) + C_n \cdot \dot{\Psi}_n(t) + K_n \cdot \Psi_n(t) = F_n(t) \qquad 1 \le n \le N$$

dove si è posto:

(12) $$F_n(t) = \mathbf{\Phi}_n^T \cdot \mathbf{F}_S(t) \qquad 1 \le n \le N$$

Nella (11) le funzioni $\Psi_n(t)$, dette *coordinate modali*, o *coordinate principali*, o *ampiezza delle forme modali*, definiscono una trasformazione di coordinate per la quale il vettore spostamento **x**(t) risulta pari alla somma di N risposte modali $\mathbf{x}_n(t)$, relative agli N *modi di vibrare*, date dall'espressione:

(13) $$\mathbf{x}_n(t) = \Psi_n(t) \cdot \mathbf{\Phi}_n$$

ovvero:

(14) $$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \Psi_n(t) \cdot \mathbf{\Phi}_n = [\Phi] \cdot \mathbf{\Psi}(t)$$

Nella (14) $[\Phi]$ indica la *matrice modale* (che ha per colonne gli autovettori $\mathbf{\Phi}_n$) e $\mathbf{\Psi}(t)$ il vettore che ha per elementi le N funzioni $\Psi_n(t)$. Si conclude quindi che se il sistema è classicamente smorzato, la matrice modale rende possibile disaccoppiare l'equazione del moto (3) poiché $[\Phi]$ diagonalizza simultaneamente le matrici [M], [C] e [K].
Se comunque è possibile scrivere la matrice di smorzamento [C] nella forma (*dissipazione proporzionale*):

(15) $$[C] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K]$$

con α e β numeri reali, si dimostra che la stessa trasformazione (13) che disaccoppia le equazioni del sistema non smorzato, disaccoppia anche le equazioni del sistema smorzato (3). Si noti che le equazioni (11), così scritte, sono formalmente analoghe all'equazione del moto di un sistema smorzato SDOF soggetto a forzante esterna. Per questo motivo le quantità M_n, C_n e K_n, definite rispettivamente dalle (7), (10) e (8), costituiscono le proprietà generalizzate (di massa, smorzamento e rigidezza) del sistema associate all'n-esimo modo di vibrare, mentre $F_n(t)$ rappresenta la forzante generalizzata.
Dalle relazioni (2) e (12), l'azione sismica generalizzata può essere posta nella forma seguente:

(16) $$F_n(t) = \Lambda_n \cdot \ddot{x}_S(t)$$

essendo:

(17) $$\Lambda_n = \mathbf{\Phi}_n^T \cdot [M] \cdot \mathbf{I}$$

il *fattore modale dell'azione sismica*. Con queste notazioni le equazioni modali (11) possono essere scritte come:

(18) $$\ddot{\Psi}_n(t) + 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot \dot{\Psi}_n(t) + \omega_n^2 \cdot \Psi_n(t) = L_n \cdot \ddot{x}_S(t) \qquad 1 \le n \le N$$

dove:

(19) $$\xi_n = \frac{C_n}{2 \cdot \omega_n \cdot M_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{\omega_n} + \beta \cdot \omega_n \right)$$

è il *rapporto modale di smorzamento viscoso* e

(20) $$L_n = \frac{\Lambda_n}{M_n} = \frac{\mathbf{\Phi}_n^T \cdot [M] \cdot \mathbf{I}}{\mathbf{\Phi}_n^T \cdot [M] \cdot \mathbf{\Phi}_n}$$

è il *coefficiente di partecipazione modale*. Le equazioni (18) consentono di disaccoppiare il problema (3) e questo significa poter trattare il sistema (struttura) come se fosse un insieme di N sistemi SDOF indipendenti, le soluzioni dei quali forniscono le coordinate modali $\Psi_n(t)$. Ogni sistema, inoltre, è caratterizzato dal coefficiente di partecipazione modale L_n, il quale assume un'importanza di rilievo nelle analisi strutturali, poiché esso determina il peso che ha l'n-esimo modo di vibrare nel calcolo degli spostamenti e delle forze per l'azione sismica $d^2x_S(t)/dt^2$.

SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI MODALI

Come detto, la generica equazione modale (18), ovvero il sistema (11), corrisponde all'equazione del moto di un sistema SDOF (avente massa M_n, smorzamento viscoso C_n e rigidezza elastica K_n) soggetto alla forzante $L_n \cdot d^2x_S(t)/dt^2$. La coordinata modale principale $\Psi_n(t)$ (soluzione della (18)) è del tipo:

(21) $$\Psi_n(t) = \frac{L_n}{\omega_{Dn}} \cdot X_n(t)$$

nella quale si è indicato con

(22) $$X_n(t) = \int_0^t \ddot{x}_S(\tau) \cdot \sin(\omega_{Dn}(t - \tau)) \cdot \exp(-\xi_n \cdot \omega_n (t-\tau)) \cdot d\tau$$

l'*integrale di convoluzione* (o *integrale di Duhamel*) e si è posto:

(23) $$\omega_{Dn} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

Dalla (21) si vede che la funzione integrale $X_n(t)$ dipende dal modo di vibrare attraverso il rapporto di smorzamento ξ_n e la pulsazione ω_n. La risposta modale del sistema relativa all'n-esimo modo, per la (13), è data da:

(24) $$\mathbf{x}_n(t) = \frac{L_n}{\omega_{Dn}} \cdot X_n(t) \cdot \mathbf{\Phi}_n$$

cosicché il vettore spostamento **x**(t) del sistema si ottiene, dalla (14), come somma di tutte queste risposte:

(25) $$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{L_n}{\omega_{Dn}} \cdot X_n(t) \cdot \mathbf{\Phi}_n$$

CALCOLO DEI PARAMETRI DI SOLLECITAZIONE

Nota la risposta in termini di **x**(t) è di interesse determinare i parametri di sollecitazione (forze e momenti) agenti sul sistema (struttura) per effetto dell'azione sismica. Come noto, l'equazione vettoriale del moto (3) esprime, in forma matriciale, istante per istante, l'equilibrio delle forze effettive associate a ciascun grado di libertà del sistema, ovvero:

(26) $[M] \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t)$ forze d'inerzia

(27) $[C] \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t)$ forze di smorzamento viscoso

(28) $[K] \cdot \mathbf{x}(t)$ forze elastiche

(29) $\mathbf{F}_S(t)$ forze sismiche

Ognuno di questi vettori ha per elementi le N forze associate agli N gradi di libertà. In particolare se la struttura è un telaio multipiano, tenendo conto della (14), il vettore:

(30) $$\mathbf{T}(t) = [K] \cdot \mathbf{x}(t) = [K] \cdot [\Phi] \cdot \mathbf{\Psi}(t)$$

contiene le N forze elastiche che si sviluppano in corrispondenza dei traversi, ovvero le forze di taglio agenti ad ogni piano della struttura. É pratica comune, tuttavia, esprimere queste forze in termini di forze inerziali equivalenti (proporzionali alle masse strutturali) sviluppate dalle vibrazioni libere non smorzate. Indicando con $[\Omega^2]$ la matrice diagonale che ha per elementi i quadrati delle pulsazioni modali, ovvero ω_n^2, e riscrivendo la (4) nella forma:

(31) $$[K] \cdot [\Phi] = [M] \cdot [\Phi] \cdot \left\lfloor \Omega^2 \right\rfloor$$

otteniamo:

(32) $$\mathbf{T}(t) = [M] \cdot [\Phi] \cdot \left\lfloor \Omega^2 \right\rfloor \cdot \mathbf{\Psi}(t)$$

Ipotizzando piccoli valori del rapporto di smorzamento ξ_n si può porre $\omega_{Dn} \approx \omega_n$, possiamo scrivere la (32) come:

(33) $$\mathbf{T}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{T}_n(t)$$

dove si è posto:

(34) $$\mathbf{T}_n(t) = L_n \cdot \omega_n \cdot X_n(t) \cdot [M] \cdot \mathbf{\Phi}_n$$

Come detto in precedenza, si fa notare come l'importanza di ogni contributo modale (relazione (33)) al vettore delle forze di taglio **T**(t) sia legata al coefficiente di partecipazione modale L_n. La (33), oltre a mettere in evidenza che questo vettore è dato dalla somma dei vettori delle forze di taglio $\mathbf{T_n}$(t) associati agli N modi di vibrare, esprime la conclusione che l'effetto dinamico globale della forza sismica $\mathbf{F}_S$(t) agente alla base della struttura, istante per istante, è equivalente all'azione di N forze orizzontali (vettore **T**(t)) applicate ai traversi del telaio.
Note queste forze ad ogni istante della durata della forzante sismica, qualunque altro parametro di sollecitazione strutturale lo si ricava mediante semplici analisi statiche.

Sollecitazioni alla base
Tenendo conto della (17), il *taglio alla base* T(t) lo si calcola come somma di tutti i contributi modali dei tagli alla base $T_n(t)$ associati agli N modi di vibrare:

(35) $$T(t) = \sum_{n=1}^{N} T_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{T}_n(t) \cdot \mathbf{I} = \sum_{n=1}^{N} L_n \cdot \omega_n \cdot X_n(t) \cdot \mathbf{\Phi}_n^T \cdot [M] \cdot \mathbf{I} = \sum_{n=1}^{N} M_{n(e)} \cdot \omega_n \cdot X_n(t)$$

Da questa si ricava:

(36) $$T_n(t) = M_{n(e)} \cdot \omega_n \cdot X_n(t)$$

dove si indicato con:

(37) $$M_{n(e)} = L_n \cdot \Lambda_n = \frac{\Lambda_n^2}{M_n} = \frac{\left(\mathbf{\Phi}_n^T \cdot [M] \cdot \mathbf{I}\right)^2}{\mathbf{\Phi}_n^T \cdot [M] \cdot \mathbf{\Phi}_n}$$

la *massa modale effettiva* associata all'n-esimo modo di vibrare. Questa quantità rappresenta la frazione della massa totale M* della struttura che l'n-esimo modo di vibrare riesce ad eccitare durante l'evento sismico. Nel caso specifico in oggetto del telaio semplice di N traversi la (37) si semplifica nella relazione (matrice di massa [M] diagonale):

(38) $$M_{n(e)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} M_i \cdot \Phi_{ni}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} M_i \cdot \Phi_{ni}^2}$$

essendo M_i la massa dell'i-esimo traverso e Φ_{ni} la componente i-esima dell'n-esimo vettore modale $\mathbf{\Phi}_n$. Si dimostra che la somma di tutte le masse modali effettive è pari alla massa totale M*:

(39) $$\sum_{n=1}^{N} \frac{\Lambda_n^2}{M_n} = M^*$$

L'importanza della (37) consiste nel fatto che la conoscenza delle masse modali effettive consente di valutare quanti modi di vibrare è necessario considerare nell'analisi dinamica affinché, sotto l'evento sismico, sia coinvolta globalmente una certa frazione minima (stabilita dalla normativa) della massa totale M*.
Con questa definizione, nella (36) la quantità $\omega_n \cdot X_n(t)$ assume il significato di accelerazione modale del suolo. Tenendo conto della (21), la relazione (35) può essere riscritta nella forma:

(40) $$T(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cdot \Psi_n(t)$$

nella quale i coefficienti A_n sono dati da:

(41) $$A_n = \Lambda_n \cdot \omega_n^2$$

La (40) esprime l'importante risultato che il taglio alla base è una funzione lineare delle $\Psi_n(t)$. Questo risultato vale in generale per tutti i parametri che siano funzioni lineari delle $x_n(t)$ (componenti di $\mathbf{x}(t)$).
Se con **z** si indica il vettore che ha per elementi le ordinate dei traversi rispetto al suolo, il *momento alla base* della struttura M(t) si calcola, per la (32), come:

(42) $$M(t) = \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{T}(t) = \mathbf{z}^T \cdot [M] \cdot [\Phi] \cdot \left[\Omega^2\right] \cdot \mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{z}^T \cdot [M] \cdot \sum_{n=1}^{N} L_n \cdot \omega_n \cdot X_n(t) \cdot \mathbf{\Phi}_n$$