

INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI E ALLA MODELLAZIONE FEM

Andrea BACCHETTO *

* *Ingegnere Civile Strutture; Dottorato di Ricerca in "Meccanica delle Strutture"; SKF Engineering & Research Centre*

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

I fenomeni naturali e le attività umane generano forze, variabili nel tempo, su strutture semplici o complesse. L'analisi del progetto di tali strutture soggette a carichi dinamici costringono a considerare le forze inerziali dipendenti da tempo. La resistenza di una struttura allo spostamento può includere forze che sono funzioni dello spostamento stesso e della velocità. Di conseguenza, le equazioni che governano il moto del sistema sono generalmente *equazioni differenziali alle derivate parziali* (generalmente non-lineari), ovvero PDEs (*Partial Differential Equations*) che sono estremamente difficili da risolvere in termini matematici. Di fatto, solo per certe situazioni semplificate si possono ottenere soluzioni analitiche. Fra i metodi analitici più usati per la risoluzione di una PDE vi sono quelli basati sulle *Trasformate di Fourier* e di *Laplace*, metodi largamente impiegati nella risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie. Il procedimento consiste nel ridurre la PDE in una equazione ordinaria della trasformata di Fourier o di Laplace della funzione incognita. Risolta quest'ultima equazione, l'incognita viene determinata mediante una antitrasformazione.

Per i problemi fisici reali (che implicano complesse proprietà dei materiali, condizioni di carico e condizioni al contorno), invece, quello che si tenta di fare è di introdurre ipotesi ed idealizzazioni necessarie per rendere il problema matematicamente più facile, ma ancora capaci di fornire soluzioni sufficientemente approssimate e risultati abbastanza soddisfacenti dal punto di vista della sicurezza e dell'economia. Il legame tra il reale sistema fisico e la soluzione matematica è fornito dal *modello matematico* del sistema idealizzato, che include tutte le ipotesi ritenute significative per il sistema reale.

La soluzione delle equazioni del modello matematico viene, attualmente, calcolata attraverso l'impiego di potenti metodi numerici che rendono possibili l'esecuzione dello studio e della progettazione in maniera pratica ed efficace. L'analisi teorica delle tecniche di simulazione numerica e lo sviluppo applicativo dei relativi codici di calcolo all'ingegneria meccanica-strutturale, costituiscono l'oggetto di studio della *Meccanica Computazionale delle Strutture*.

Metodo delle Differenze Finite (FDM)

Poiché è sempre possibile (sotto certe ipotesi) scrivere le equazioni differenziali e le condizioni al contorno anche di problemi complessi, si può riscontrare tuttavia come non sia sempre possibile trovare una soluzione analitica in forma chiusa, a causa della irregolarità della geometria. Una possibilità per superare questa difficoltà è quella di fare ipotesi semplificative per ridurre il problema dato ad uno possibile da trattare. Cronologicamente, il primo metodo di Analisi Numerica sviluppato è stato il *Metodo delle Differenze Finite*, ovvero *FDM (Finite Differences Method)*. Tale metodo lascia per così dire inalterato il modello fisico e discretizza le equazioni differenziali del problema. L'algoritmo delle equazioni alle differenze finite aumenta di efficacia al crescere del numero dei punti (dove la funzione è incognita) di intersezione della griglia, che si sovrappone al dominio di definizione della funzione incognita. Con il FDM si possono trattare problemi anche molto complessi (per esempio di Fluidodinamica Numerica). Se tuttavia subentrano geometrie irregolari o particolari condizioni al contorno, tale metodo diventa di difficile applicazione.

Metodo degli Elementi Finiti (FEM)

Più recentemente l'FDM è stato soppiantato dal *Metodo degli Elementi Finiti*, ovvero *FEM (Finite Element Method)*, una tecnica dell'Analisi Numerica volta ad ottenere, come anticipato, soluzioni approssimate per una molteplicità di problemi, non solo di Ingegneria Strutturale, ma anche di Fisica, Bioingegneria, Astronomia. Benché originariamente sviluppato per studiare il campo tensionale nelle strutture aeronautiche, è stato poi esteso ed applicato al vasto campo della Meccanica dei continui. Per la sua varietà di impiego e duttilità quale strumento di analisi, è stato sviluppato ed è attualmente utilizzato nelle Università e nell'Industria. In numerosi problemi fisici e ingegneristici risulta sufficiente ottenere soluzioni numeriche approssimate, piuttosto che soluzioni analitiche esatte di difficile utilizzo pratico.

Il FEM nasce in sordina negli Anni '60, ma successivamente allo sviluppo degli strumenti informatici, ha una evoluzione ed uno sviluppo esponenziali, suscitando notevole interesse per il vasto numero di campi cui è possibile applicare i suoi principi. L'uso del FEM si afferma come uno dei migliori strumenti per l'indagine quei sistemi complessi, per i quali indagini e sperimentazioni in laboratorio comporterebbero spese eccessive, difficoltà logistiche e difficoltà legate alla misurazione fisica delle varie grandezze. Se i primi approcci automatici per la soluzione delle equazioni differenziali che governano i fenomeni fisici, si affermano con le differenze finite, il FEM evolve le possibilità di soluzione dando una possibilità di applicazione che non ha eguali, grazie alla sua inoppugnabile flessibilità. La generalità del metodo, inizialmente sviluppato dagli ingegneri e successivamente dimostrata anche dai matematici, ha permesso moltissimi studi ed applicazioni, aprendo la strada a nuovi filoni di ricerca che attualmente affrontano problematiche di notevole interesse di natura teorica e pratica.

IDEA DI BASE DELL'APPROSSIMAZIONE NEL FEM

Contrariamente all'FDM, che vede il dominio da analizzare come una serie di punti di un reticolo, il FEM vede il dominio come l'unione di tanti sottodomini di forma elementare (Figura 1).

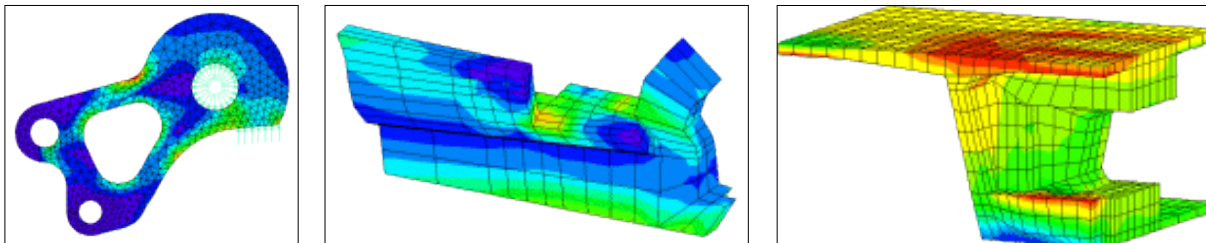


Figura 1

Sintetizzando, come si è fatto in precedenza, si può dire che, in quest'ultimo caso, le equazioni differenziali vengono lasciate inalterate (relativamente a ciascun elemento finito) mentre il dominio viene discretizzato. In un problema al continuo di qualsivoglia dimensione, cioè in un corpo o in una regione dello spazio in cui abbia luogo un particolare fenomeno, la variabile di campo, come la pressione, lo spostamento, la temperatura, la velocità o la densità, è funzione di ciascun generico punto del dominio di definizione. Di conseguenza il problema presenta un numero infinito di incognite. La procedura di discretizzazione agli elementi finiti lo riduce ad un problema con un numero finito di incognite, suddividendo il dominio in *elementi finiti* ed esprimendo il campo incognito in termini di funzioni approssimanti, definite all'interno di ogni elemento.

Le funzioni approssimanti, chiamate anche *funzioni di forma*, vengono individuate mediante i valori che la variabile dipendente assume in punti specifici detti nodi. I nodi sono posti di solito sul contorno degli elementi, in punti comuni a due o più elementi. Oltre ai nodi sul contorno un elemento può presentare dei nodi al suo interno. I valori che la variabile di campo assume sui nodi, ne definiscono univocamente l'andamento all'interno dell'elemento. Nella rappresentazione agli elementi finiti di un problema, i valori nodali della variabile di campo rappresentano le nuove incognite.

Come anticipato, l'idea base dell'approssimazione usata nel metodo agli elementi finiti è quella di approssimare il vero andamento della funzione incognita con quello di alcune funzioni particolari ad andamento noto: generalmente polinomiali, ma anche trigonometriche ed esponenziali. Vengono presi in considerazione un numero limitato di punti (chiamati anche *nodi*) interni al dominio di integrazione, per i quali i valori della funzione approssimata risulteranno identici a quelli della funzione approssimante.

A supporto di tale affermazione citiamo il teorema di Weierstrass per il quale se una funzione f è continua nell'intervallo $[a,b]$ fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$, esiste un polinomio $P(x)$ tale che:

$$(1) \quad |f - P(x)| < \varepsilon$$

Cioè ogni funzione continua può essere sufficientemente approssimata da un polinomio di grado sufficientemente elevato

È evidente come l'approssimazione lineare, che risulta essere quella più semplice, è anche quella peggiore nella qualità dell'approssimazione stessa. In accordo con il teorema di Weierstrass, infatti, l'ordine del polinomio utilizzato nell'approssimare la soluzione reale, infatti, influisce sulla precisione con cui si potranno valutare la soluzione delle equazioni differenziali: più è elevato il grado, migliore sarà l'approssimazione.

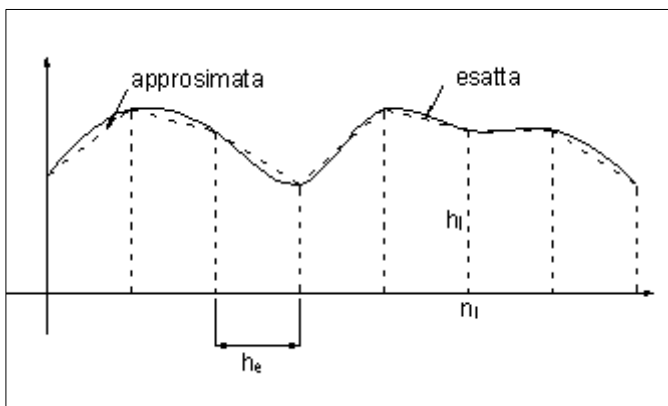


Figura 1

In Figura 1 è mostrato chiaramente il principio di base utilizzato nel metodo FEM: una volta suddiviso il dominio di integrazione in intervalli (che possono essere anche non regolari), si procede ad approssimare la funzione incognita con delle funzioni ad andamento noto, scegliendo, come incognite del problema trattato, i soli valori ai nodi (h_i). Dalla soluzione delle equazioni algebriche si otterranno i valori nodali del campo approssimato; quelli interni agli intervalli vengono valutati in base alle funzioni di approssimazione utilizzate.

Precisione dell'approssimazione

È necessario sottolineare come la precisione dell'approssimazione dipenda, oltre che dal grado del polinomio utilizzato, anche dalla dimensione dell'intervallo di suddivisione: mantenendo, ad esempio, un polinomio lineare, l'errore si riduce nella misura in cui vengono ravvicinati i nodi e quindi di quanto vengono ridotti gli intervalli.

Risulta evidente a questo punto come nel caso di presenza di forti gradienti (pendenze) della funzione da approssimare, risulti necessario infittire i nodi solo in tale zona piuttosto che in tutto il dominio della stessa. Tale potente flessibilità è uno dei maggiori vantaggi del FEM rispetto al FDM.

Perché “Elementi Finiti”?

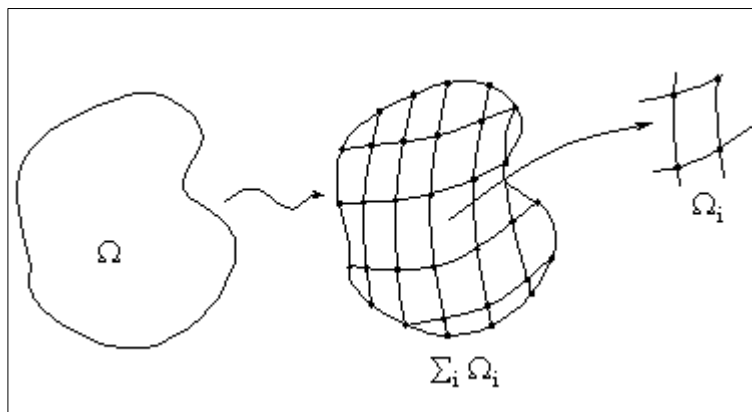


Figura 2

Il termine *elementi finiti* fu utilizzato in un articolo di Clough del 1960 dove il metodo fu presentato per la soluzione di uno stato piano di tensione. Il termine deriva dal fatto che il dominio di integrazione viene suddiviso in un determinato numero di sotto-domini (Figura 2), all'interno dei quali le equazioni differenziali che governano il problema vengono risolte in maniera approssimata nel senso espresso sopra.

DISCRETIZZAZIONE DEL DOMINIO DI INTEGRAZIONE

Uno dei passi più importanti dell'analisi strutturale è l'*idealizzazione* della struttura che permette di passare dal modello fisico a quello numerico. Tale passaggio comporta la riduzione del numero di gradi di libertà che nel mezzo continuo sono infiniti, mentre, considerando solo alcuni punti (nodi) della struttura, sono in numero, per l'appunto, finito.

Si parla allora di *discretizzazione della struttura* come quell'operazione che permette di passare dalla struttura reale e quella idealizzata / approssimata / discretizzata per la quale è possibile applicare il metodo degli elementi finiti al fine di ottenere una soluzione ingegneristica del problema.

Sapendo inoltre che la soluzione mediante l'utilizzo di metodi numerici avviene per mezzo di calcolatori elettronici, l'idea della discretizzazione è legata al limite fisico che tali macchine possiedono a livello di immagazzinamento di dati (memoria). Nonostante l'evoluzione della tecnologia degli elaboratori abbia permesso di risolvere oggi dei problemi che qualche decennio fa erano ingestibili per la grossa mole di spazio fisico necessario per memorizzare dati di input e dati di output, la realizzazione del modello numerico risulta essere tuttora un problema non ancora risolto in via definitiva.

La modellazione della struttura costituisce quindi uno dei passi più importanti dell'analisi strutturale, in quanto in questa fase vengono infatti formulate diverse ipotesi che permetteranno la semplificazione del modello reale: i risultati saranno influenzati da queste assunzioni, che comunque, una volta note, permetteranno una corretta interpretazione dei valori numerici.

Una breve introduzione alle molle

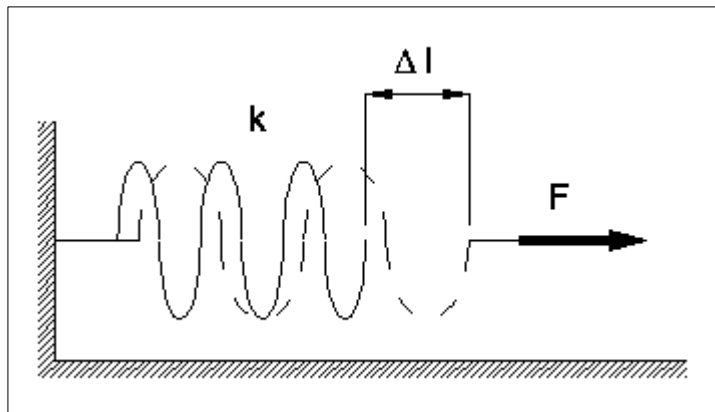


Figura 3

Prima di passare alla vera e propria discretizzazione delle strutture, una nota sulle molle a comportamento elastico lineare è d'obbligo: esse infatti rappresentano uno dei più importanti punti di riferimento per la comprensione del comportamento di una struttura anche complessa. Dall'impostazione classica dello studio delle strutture è usuale, infatti, schematizzare i corpi con un insieme di molle. Tali molle possono essere di tipo traslazionale o rotazionale a seconda che debbano rappresentare gradi di libertà legati a spostamenti o rotazioni. La sollecitazione di sforzo assiale, ad esempio, può essere rappresentata mediante una molla traslazionale (Figura 3).

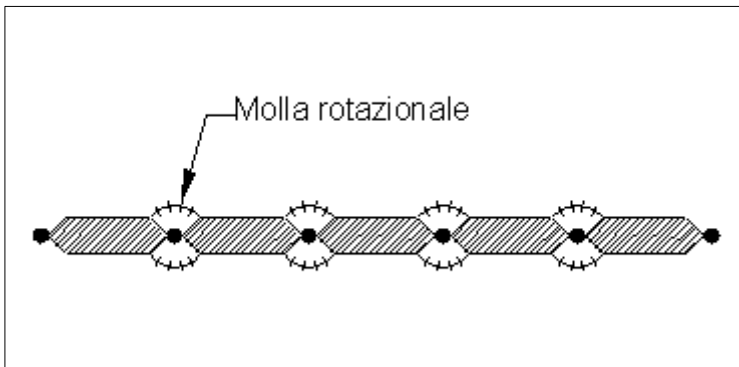


Figura 4

La sollecitazione a momento flettente trova invece la sua più semplice rappresentazione in una molla rotazionale (Figura 4), il cui valore di momento sviluppato è pari al prodotto della rigidità e della variazione di apertura angolare ($M=k_{\varphi}\varphi$). Alcuni principi e regole di base sono importanti al fine di un corretta comprensione di una struttura e la sua possibile evoluzione a seguito dell'applicazioni dei carichi.

Consideriamo ora una semplice molla traslazionale a comportamento lineare:

$$(2) \quad F = k \cdot \Delta l$$

dove k è la rigidità della molla, Δl è l'allungamento della molla rispetto alla posizione di partenza (cioè in condizione scarica) e F è la forza che è necessario applicare alla molla per deformarla di Δl o, viceversa, la reazione che il vincolo della molla deve esplicare a seguito di un allungamento pari a Δl .

L'importanza dell'argomento molle è presto dimostrata: si parla infatti di *rigidità di una struttura* e di *matrice di rigidità*, intendendo quella funzione di trasferimento del sistema dall'insieme delle forze applicate a quello degli spostamenti indotti. Per un sistema non più governato da un'unica molla, e quindi non più da un solo grado di libertà, ma da un insieme di molle, che rappresentano i vari gradi di libertà che possiede un corpo, la relazione diventa la seguente:

$$(3) \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{f}$$

dove \mathbf{K} è l'operatore lineare detto anche *matrice di rigidità*, \mathbf{U} è, nello spazio vettoriale di arrivo, il vettore delle incognite e \mathbf{f} è, nello spazio vettoriale di partenza, il vettore dei termini noti. È degno di nota vedere inoltre come la scrittura formale dei problemi descritti in (2) e (3) si presenti molto simile, potendo quindi attribuire a k e a \mathbf{K} un significato analogo, facilitando in tale maniera il comportamento globale di una struttura.

SCelta DELLE FUNZIONI DI FORMA

Come ricordato, la discretizzazione del dominio porta quindi alla generazione di nodi e di elementi finiti. I *nodi*, nelle applicazioni del metodo FEM, sono entità molto importanti in quanto la soluzione dell'intera struttura viene riferita ad essi: per estendere i valori del campo delle incognite su tutto il corpo vengono utilizzate delle funzioni che con la desiderata approssimazione riportano i valori nodali in ogni sottodominio.

Gli elementi finiti sono delle entità geometriche più o meno regolari caratterizzate da un determinato numero di nodi variabile a seconda del tipo di elemento. Tali nodi possono coincidere con i vertici degli elementi, ma in alcuni casi, ce ne possono essere alcuni disposti lungo i lati degli elementi stessi o addirittura all'interno. Un elemento quadrangolare, ad esempio, può avere un numero di nodi variabile da quattro (uno per ogni vertice) a nove (quattro ai vertici, quattro nei punti medi dei lati ed uno centrale). È evidente che all'aumentare del numero di nodi aumenta il grado del polinomio utilizzato per interpolazione dei dati ai nodi e, quindi, aumenta anche la qualità dell'approssimazione.

La scelta delle *funzioni di forma*, che sono generalmente polinomiali (o comunque a comportamento noto) è un altro punto fondamentale che permette di ottenere una soluzione del modello FEM più o meno vicina alla realtà che si vuole simulare.

Al fine di rappresentare correttamente il valore ai nodi, le funzioni di forma devono assumere valori unitari nel nodo considerato e valori nulli sul resto dei nodi. Il campo delle incognite per un problema di tipo tridimensionale può essere rappresentato mediante la seguente relazione generale:

$$(4) \quad u = u(x, y, z)$$

Cioè a dire che il campo delle incognite è una funzione delle tre coordinate x , y , e z . Al fine di sfruttare il principio di approssimazione già introdotto precedentemente, si dovrà scegliere un insieme di punti in cui specificare esattamente le incognite (u^*_i), mentre l'andamento della funzione è legato esclusivamente al comportamento delle funzioni di approssimazione N_i dell'elemento dette funzioni di forma:

$$(5) \quad u = \sum_{i=1}^m N_i(x, y, z) \cdot u_i^*$$

Quindi solo le funzioni N_i dipendono dalla posizione.

Funzioni di forma di elementi monodimensionali

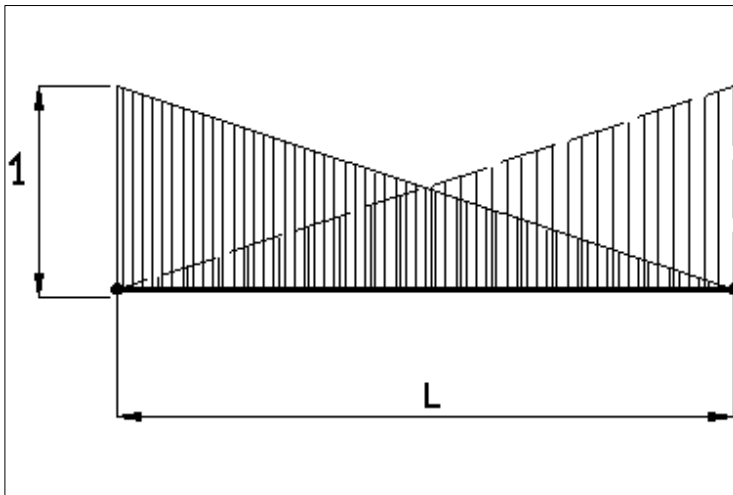


Figura 5

L'esempio più semplice di funzione di forma è l'elemento finito lineare a due nodi dove le funzioni di forma sono di tipo lineare (Figura 5):

$$(6) \quad \begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned}$$

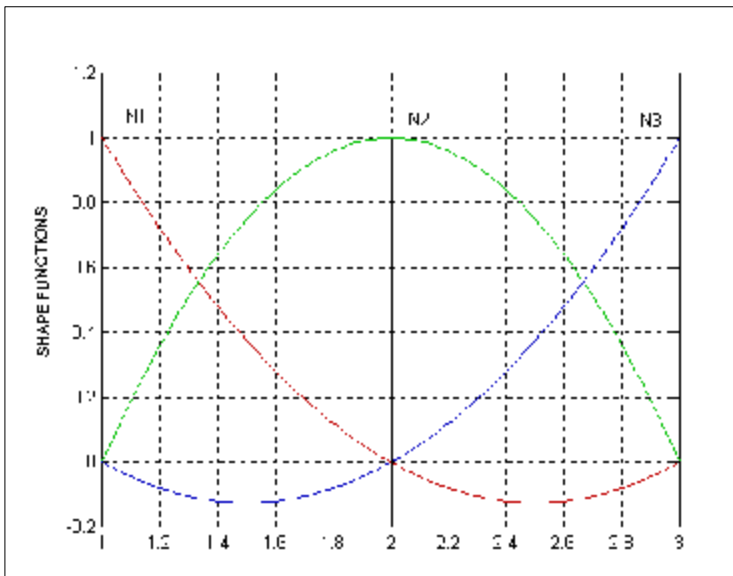


Figura 6

Per un elemento lineare è possibile utilizzare anche funzioni di forma a grado più elevato, oppure le funzioni lagrangiane definite dalle seguenti formule:

$$(7) \quad \begin{aligned} N_1 &= (r-1)(2r-1) \\ N_2 &= 4r(1-r) \\ N_3 &= r(2r-1) \end{aligned}$$

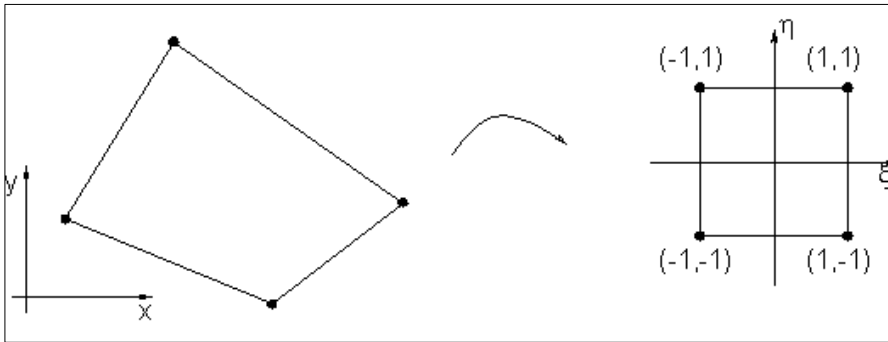
e rappresentate graficamente nella Figura 6.

È facile notare come le funzioni mostrate qui sopra assumono valore unitario nel nodo di appartenenza e nullo nel resto dei nodi.

Funzioni di forma di elementi bidimensionali

Le applicazioni che utilizzano elementi bidimensionali sono molto ampie (assialsimmetriche, stati piani di tensione e deformazione, ecc.).

Secondo una formulazione isoparametrica degli elementi finiti, per l'esecuzione delle operazioni di integrazione al fine di valutare le varie matrici (di rigidità, di massa, ecc.) utili all'assemblaggio, si ricorre ad una trasformazione di coordinate dalle generali (x_1, x_2) a quelli locali (ξ, η) , per le quali il generico quadrilatero viene trasformato in un quadrato di lato 2 centrato nell'origine (Figura 7).



Per questa tipologia di elemento finito esistono vari gradi di approssimazione; per un elemento a quattro nodi si utilizzano delle funzioni bi-lineari che nello spazio di riferimento assumono le seguenti forme:

Figura 7

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

La trasformazione in coordinate locali risulta essere molto comoda in fase di integrazione sopra la superficie dell'elemento. I solutori ad elementi finiti hanno sviluppato una potente sistematicità e velocità che permette di calcolare gli integrali di tutti gli elementi dell'assemblaggio. Come tutte le trasformazioni di coordinate in fase di integrazione in più di una dimensione richiede il calcolo del determinante *Jacobiano* J della trasformazione. Tale calcolo risulta però particolarmente difficile da trattare dal punto di vista numerico quando la geometria dell'elemento originario presenta distorsioni notevoli come rapporti tra i lati molto grandi o angoli ai vertici tendenti o maggiori dell'angolo piatto (180°). In tali casi il determinante può risultare nullo o addirittura negativo, innescando una serie di problemi legati all'inversione della matrice della trasformazione. Le relazioni della trasformazione di coordinate sono espresse simbolicamente dalle seguenti:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}
 \tag{9}$$

Si noti come la trasformazione $(x,y) \leftrightarrow (\xi,\eta)$ viene fatta sotto l'ipotesi di considerare un elemento isoparametrico. Altri tipi di funzioni di forma sono mostrati in Figura 8

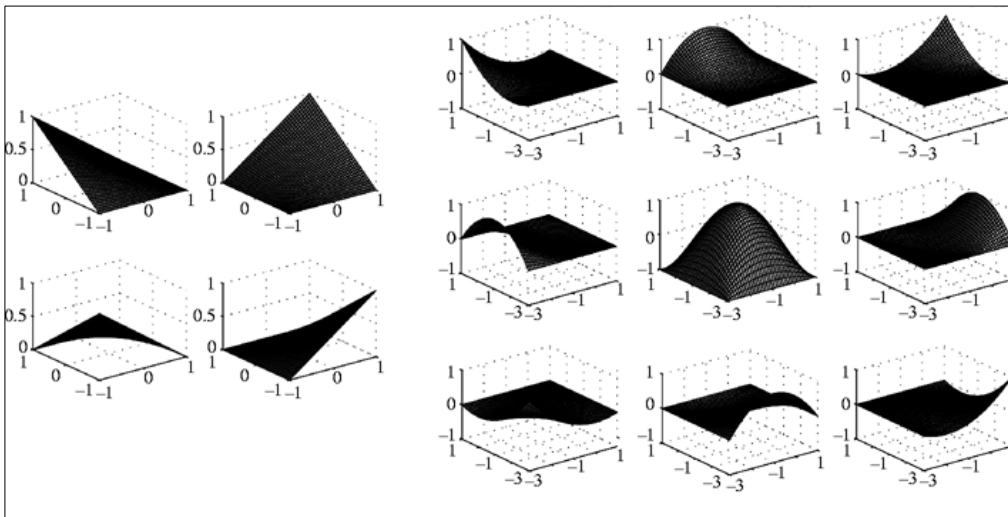


Figura 8